III KONFERENCJA

MATEMATYCZNO – INFORMATYCZNA

„CONGRESSIO - MATHEMATICA”

Rzeszów, 27 – 29.09.2017

III KONFERENCJA MATEMATYCZNO – INFORMATYCZNA

„CONGRESSIO - MATHEMATICA"

Rzeszów, 27 – 29.09.2017

ORGANIZATORZY

Wydział Matematyczno – Przyrodniczy
Uniwersytet Rzeszowski

Katedra Analizy Zespolonej
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

Wydział Fizyki Technicznej, Informatyki
i Matematyki Stosowanej
Politechnika Łódzka

Honorowy Patronat
nad tegoroczną konferencją objęli:

JM Rektor
Uniwersytetu Rzeszowskiego
Prof. dr hab. Sylwester CZOPEK

JM Rektor
Uniwersytetu Warmińsko – Mazurskiego w Olsztynie
Prof. dr hab. Ryszard GÓRECKI

Komitet Organizacyjny:

Jacek Dziok – Rzeszów (przewodniczący)
Adam Lecko – Olsztyn (z-ca)
Piotr Liczberski – Łódź (z-ca)

Kinga Cudna – Olsztyn
Paweł Drygaś – Rzeszów
Katarzyna Garwol – Rzeszów
Renata Jurasińska – Rzeszów
Joanna Kowalczyk – Rzeszów
Millenia Lecko – Rzeszów
Anna Szpila – Rzeszów

Komitet Naukowo-Programowy:

Piotr Artiemjew – Olsztyn
Jacek Chudziak – Rzeszów
Stanisław Domoradzki – Rzeszów
Jacek Dziok – Rzeszów
Marek Golasiński – Olsztyn
Jan Jakóbowski – Olsztyn
Zbigniew J. Jakubowski – Łódź
Stanisława Kanas – Rzeszów
Leopold Koczan – Lublin
Adam Lecko – Olsztyn
Piotr Liczberski – Łódź
Julian Ławrynowicz – Łódź
Ołeh Łopuszański - Rzeszów
Witold Łukaszewicz – Olsztyn
Marek Markowski – Olsztyn
Andriy Panasyuk – Olsztyn
Dariusz Partyka – Lublin
Janusz Sokół – Rzeszów
Jan Stankiewicz – Rzeszów
Zbigniew Suraj – Rzeszów
Ewa Swoboda – Rzeszów
Jan Szynal – Lublin
Wiesław Śliwa – Rzeszów
Aleksy Tralle – Olsztyn
Dov Bronisław Wajnryb – Rzeszów
Józef Zając – Lublin, Chełm
Michał Zariczny – Rzeszów
Mirosława Zima – Rzeszów
Eligiusz Złotkiewicz – Lublin

Sponsorzy:

Firma OPTeam S.A.

Hotel Prezydencki

Sanocki Dom Kultury

Konferencja Matematyczno-Informatyczna „Congressio-Mathematica”
Program szczegółowy

Środa, 27 września 2017	
11:00-15:00	Rejestracja uczestników konferencji (ul. Prof. Stanisława Pigonia 1)
13:10-14:10	Obiad
14:10-14:30	Otwarcie konferencji
Sesja wykładów, przewodniczy: Ołeh Łopuszański	
14:30-15:10	Jan Jakóbowski *Pomiędzy geometrią i algebrą. Wariacje o płaszczyznach rzutowych małych rzędów*
15:20-16:00	Józef Zając *Elementary knowledge in function space research*
16:00-16:20	Przerwa na kawę
Sesja referatów (część I), przewodniczy: Jan Jakóbowski	
16:20-16:40	Janusz Sokół *O pewnej własności brzegowej dla funkcji analitycznych*
16:45-17:05	Anna Zając *Complex Lagrange Theorem and univalence criterions*
Sesja referatów (część II), przewodniczy: Józef Zając	
17:15-17:35	Jan Stankiewicz *Pewne problemy otwarte w teorii funkcji zespolonych*
17:40-18:00	Andrzej Michalski *Warunki konieczne zwartości różnicy operatorów złożenia na przestrzeni Dirichleta*

18:30-21:00	Kolacja powitalna

Czwartek, 28 września 2017 SEKCJA MATEMATYCZNA	
Sesja wykładów (część I), przewodniczy: Julian Ławrynowicz	
09:00-09:40	Michał Zariczny *Max-min measures on compact spaces*
09:50-10:30	Bronisław Wajnryb *The mapping class group of a surface is generated by two elements*
10:30-10:50	Przerwa na kawę
Sesja wykładów (część II), przewodniczy: Bronisław Wajnryb	
10:50-11:30	Julian Ławrynowicz *Matematyczne koncepcje owocujące dwiema powiązanymi nagrodami Nobla 2016: z fizyki – topologia struktur fizyki przejść fazowych, z chemii – geometria molekuł jako nanomotorków*
11:40-12:20	Marek Golasiński *Pierścienie funkcji analitycznych i gładkich na okręgu*
12:30-16:50	**Referaty w sekcjach (opis poniżej)**
Sesja referatów (część I), przewodniczy: Jacek Chudziak	
12:30-12:50	Mirosława Zima *Dodatnie rozwiązania okresowego zagadnienia brzegowego*
12:55-13:15	Katarzyna Szymańska-Dębowska *Układy równań rzędu pierwszego z nielokalnymi warunkami brzegowymi*
13:20-13:40	Piotr Drygaś *Contrast expansion method for elastic incompressible fibrous composites*
13:40-14:40	Obiad
Sesja referatów (część II), przewodniczy: Mirosława Zima	
14:40-15:00	Jacek Chudziak *Charakteryzacja funkcji typu Goldsteina-Einhorna*
15:05-15:25	Petro Kalenyuk, Zinovii Nytrebych, Mykhaylo Symotyuk *Integral problem for an equation with Gelfond-Leontiev generalized differentiation*
15:30-15:50	Agnieszka Tanaś *Evolution of states of a finite fission-death system*
15:50-16:10	Przerwa na kawę
Sesja referatów (część III), przewodniczy: Michał Zariczny	
16:10-16:30	Marek Żołdak *Sequences of conditionally approximately convex functions*
16:35-16:55	Grzegorz Kuduk *Zagadnienie z całkowymi warunkami dla układów równań różniczkowych cząstkowych*

Czwartek, 28 września 2017
SEKCJA INFORMATYCZNA

Sesja wykładów (część I), przewodniczy: Zbigniew Suraj	
9:00-9:40	Mikhail Moshkov *Extensions of dynamic programming for investigation of decision trees*
9:50-10:30	Jerzy Montusiewicz *Zintegrowany system do wspomagania decyzji wielokryterialnych: budowa i zastosowanie*
10:30-10:50	Przerwa na kawę
Sesja wykładów (część II), przewodniczy: Mikhail Moshkov	
10:50-11:30	Piotr Artiemjew *Obliczenia granularne stosowane do aproksymacji decyzji: zastosowania idei aproksymacji wywodzących się z teorii mereologii przybliżonej*
11:40-17:05	**Referaty w sekcjach (opis poniżej)**
Sesja referatów (część I), przewodniczy: Jerzy Montusiewicz	
11:40-12:00	Oleksandr Provotar *Reliability in fuzzy models of pattern recognition*
12:05-12:25	Zbigniew Lipiński *O rozwiązaniach problemu maksymalizacji czasu życia bezprzewodowych sieci sensorycznych*
12:30-12:50	Jan Bazan, Sylwia Buregwa-Czuma, Wojciech Rząsa *Analiza porównawcza dwóch metod klasyfikacji za pomocą drzew decyzyjnych z cięciami weryfikującymi*
12:55-13:15	Piotr Grochowalski, Krzysztof Pancerz, Zbigniew Suraj *The first step toward development of a computer tool for Petri nets over ontological graphs*
13:20-13:40	Piotr Lasek *Obliczenia granularne w grupowaniu danych na przykładzie algorytmu k-średnich*
13:45-14:40	Obiad
Sesja referatów (część II), przewodniczy: Piotr Artiemjew	
14:40-15:00	Wiesław Paja *Pokolenia drzew i reguł decyzji jako metoda rankingu i selekcji atrybutów istotnych*
15:05-15:25	Marek Janasz *Aspekty automatycznych dowodów twierdzeń geometrii elementarnej*
15:30-15:50	Zbigniew Suraj, Piotr Grochowalski *System ekspertowy oparty na rozmytych sieciach Petriego i jego zastosowanie w dziedzinie marketingu*
15:55-16:15	Zbigniew Suraj, Katarzyna Garwol, Piotr Grochowalski *Analiza portalu Matematycy i Informatycy Podkarpacia + z punktu widzenia użytkownika*
16:20-16:40	Marcin Wesołowski *Zastosowanie teorii rozpraszania Lorenza - Mie do numerycznego modelowania zjawiska wybuchu komet*
16:45-17:05	Sergii Mashchenko *A linear programming problem with a fuzzy set of the constraints indices*

Czwartek, 28 września 2017
SEKCJA HISTORYCZNO-DYDAKTYCZNA

Sesja wykładów, przewodniczy: Stanisław Domoradzki

10:00-10:40	Edyta Gruszczyk-Kolczyńska *Ćwierć wieku modernizacji nauczania matematyki. Przyczyny, sposoby i konsekwencje wprowadzania idei nowej matematyki w edukacji matematycznej dzieci*
10:45-11:25	Piotr Błaszczyk *Geometria Kartezjusza: od teorii proporcji do arytmetyki odcinków*
11:30-11:50	Przerwa na kawę
11:50-12:30	Krzysztof Maślanka *Globalnie zbieżne rozwinięcia funkcji dzeta Riemanna jako przykład prawa Arnolda-Berry'ego*
12:35-13:20	Ewa Swoboda *Geometryzacja jako dydaktyczne wyzwanie*
13:20-14:00	Obiad

	Część historyczna	**Część dydaktyczna**
	Sesja referatów (część I) **Przewodniczy:** Piotr Błaszczyk	**Sesja referatów (część I)** **Przewodniczy:** Ewa Swoboda
14:00-14:20	Stanisław Domoradzki *Pierwsze trzy dekady działalności Polskiego Towarzystwa Matematycznego (1920-1950)*	Renata Długosz *Wybrane metody i narzędzia kształcenia studentów*
14:20-14:40	Jan Koroński *Osiągnięcia z teorii równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych w publikacjach matematyków polskich do I wojny światowej*	Irina Drobysheva *Competence-oriented teaching students*
14:40-15:00	Karolina Karpińska *Zmiany zakresów nauczania matematyki w gimnazjach w Toruniu, Gdańsku, Kołobrzegu, Inowrocławiu, Chełmnie i Braniewie od XVI do początku XX wieku*	Yurij Drobyshev *Moral education of students in the process of studying the history of mathematics*
15:00-15:20	Małgorzata Zambrowska *Klocki Dienesa dawniej i dzisiaj. O rozwijaniu umiejętności rozumowania matematycznego młodszych uczniów*	Antoni Pardała *Matematyczne kształcenie w integracji z drugimi przedmiotami - przykłady i wyzwania przyszłości*
15:20-15:40	Maja Wenderlich *Kamienie milowe w biegu życia wybitnych matematyków i uzdolnionej matematycznie młodzieży*	Lidia Zaręba *O pewnych aspektach dotyczących stosowania wizualizacji w nauczaniu matematyki*
15:40-16:00	Przerwa na kawę	

	Sesja referatów (część II) **Przewodniczy:** Jan Koroński	**Sesja referatów (część II)** **Przewodniczy:** Antoni Pardała
16:00-16:20	Marlena Fila *O rozprawie Bernarda Bolzana: „Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege "*	Bożena Rożek *Struktury wizualne osób na różnych poziomach doświadczenia matematycznego - raport z badań eyetrackingowych*
16:20-16:40	Maciej Jasiński *Astronomiczne dane obserwacyjne w „Theatrum cometicum" Stanisława Lubienieckiego*	Violetta Lipińska *Kalkulacja składek w ubezpieczeniach życiowych - projekt*
16:40-17:00		Marta Pytlak *Strategies used by the first grade of primary school students during the work on the geometric task concerning arranging the plane*
17:00-17:20		Bożena Maj-Tatsis *Przejawy rozumowania matematycznego u ośmioletnich dzieci podczas rozwiązywania problemów – studium przypadku*

18:00-?!!?	**Uroczysta kolacja**

Piątek, 29 września 2017	
Sesja wykładów (część I), przewodniczy: Piotr Liczberski	
9:00-9:40	Leopold Koczan, Paweł Zaprawa *Wybrane metody wyznaczania zbiorów Koebego i zbiorów pokrycia*
9:50-10:30	Dariusz Partyka *Quasi-konforemność odwzorowań harmonicznych w kole jednostkowym*
10:30-10:50	Przerwa na kawę
Sesja wykładów (część II), przewodniczy: Dariusz Partyka	
10:50-11:30	Renata Długosz, Piotr Liczberski, Edyta Trybucka, *Extremal problems for functions with Bavrin's type factoryzation i* C^n
Sesja referatów, przewodniczy: Leopold Koczan	
11:40-12:00	Rostyslav Hryniv *O rekonstrukcji równań Sturma-Liouville'a o potencjałach zależnych od energii*
12:05-12:25	Sławomir Sorek *Operacje potęgowania i splotu na dystrybucjach w sensie neutriksów i ich zastosowanie w teorii sygnałów*
12:30-12:50	Piotr Błaszczyk *A purely algebraic proof of the Fundamental Theorem of Algebra*
12:50-13:50	**Sesja posterowa, sesja otwarta, podsumowanie obrad**
13:50-14:50	Obiad

STRESZCZENIA WYKŁADÓW,

REFERATÓW I POSTERÓW

Tamara ANTONOVA, Svitlana VOZNA

Lviv Polytechnic National University (Lviv, Ukraine)

Some properties of approximants for Branched Continued Fraction of the special form with positive and alternating-sign partial numerators

We research a properties of approximants for branched continued fractions of the special form (BCF):

$$F_{0,0} + \mathop{\mathrm{D}}_{i=1}^{\infty} \frac{a_{i,0}}{1+F_{i,0}} + \mathop{\mathrm{D}}_{i=1}^{\infty} \frac{a_{0,i}}{1+F_{0,i}}, \quad F_{i,j} = \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_{i+k,j+k}}{1}, \tag{1}$$

where all partial numerators $a_{i,j},\ i,j = 0,1,\ldots, i+j \geqslant 1$, are real numbers.

Ordinary approximants of BCF (1) are defined as follow

$$f_n = \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n} \frac{a_{k,k}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{i=1}^{n} \frac{a_{i,0}}{1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{n-i} \frac{a_{i+k,k}}{1}} + \mathop{\mathrm{D}}_{i=1}^{n} \frac{a_{0,i}}{1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{n-i} \frac{a_{k,k+i}}{1}}, \quad n \in \mathbf{N}, \tag{2}$$

figured approximants of BCF (1) are defined in that way

$$\tilde{f}_n = \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{[\frac{n}{2}]} \frac{a_{k,k}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{i=1}^{n} \frac{a_{i,0}}{1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{[\frac{n-i}{2}]} \frac{a_{i+k,k}}{1}} + \mathop{\mathrm{D}}_{i=1}^{n} \frac{a_{0,i}}{1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{[\frac{n-i}{2}]} \frac{a_{k,k+i}}{1}}, \quad n \in \mathbf{N}, \tag{3}$$

where $[a]$ is the integer part of a.

BCF of such form offered by Polish mathematician W. Siemaszko for the solution of the correspondence problem between a formal double power series and a sequence of the rational approximants of a function of two variables [1].

In our report we plan to consider properties of approximants of the form (2) and (3) under such conditions

$$a_{i,j} > 0,\ a_{i,0} = (-1)^{i-1}|a_{i,0}| \neq 0,\ a_{0,i} = (-1)^{i-1}|a_{0,i}| \neq 0, \quad i = 1,2,\ldots,\ j = 1,2,\ldots$$

In particular, it is shown, that sequences $\{\tilde{f}_{4n-2}\},\ \{\tilde{f}_{4n}\},\ n \in \mathbf{N}$, converge.

References

[1] W. Siemaszko, *Branched continued fractions for double power series*, J. Comp. Appl. Math. **6** (1980), no. 2, 121-125.

Piotr ARTIEMJEW

Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie
Wydział Matematyki i Informatyki (Olsztyn)

Obliczenia granularne stosowane do aproksymacji decyzji: zastosowania idei aproksymacji wywodzących się z teorii mereologii przybliżonej

Teoria mereologii przybliżonej Polkowskiego i Skowrona rozmywa relacje bycia częścią do części w stopniu. Operuje pojęciem inkluzji przybliżonej $\mu(x,y,r)$. Inkluzję przybliżoną można traktować jako szczególną postać podobieństwa i wnioskowanie w ramach mereologii przybliżonej traktować można jako szczególną postać wnioskowania przez analogie. W ramach tej teorii L.

Polkowski podał teorię preprocessingu granularnego, której ideą jest granulacja wiedzy i wydobywanie klasyfikatora z granul. Istotnym problemem było zaprojektowanie, zaimplementowanie algorytmów potrzebnych w tym programie i weryfikacja jakości klasyfikatorów tak otrzymanych czyli program Data Mining i Knowledge Discovery realizowany w obszarze mereologii przybliżonej. Podczas wykładu zaprezentowane zostaną podstawowe metody granulacji, efektywność klasyfikatorów w ich kontekście, metody pokrywania stosowane w granulacji, sposoby szukania optymalnych parametrów - w tym przez granulację wielokrotną oraz przykładowy efekt wzmacniania klasyfikatorów ważonych.

Literatura

[1] L. Polkowski, P. Artiemjew, *Granular Computing in Decision Approximation, An Application of Rough Mereology,* In: Series: Intelligent Systems Reference Library, Vol. **77**, 452 str., Springer, 2015.

[2] P. Artiemjew, *Wybrane Paradygmaty Sztucznej Inteligencji*, Wydawnictwa Polsko-Japońskiej Wyższej Szkoły Technik Komputerowych, Warszawa, 2013.

Jan G. BAZAN, Sylwia BUREGWA-CZUMA
Wojciech RZĄSA

Uniwerstytet Rzeszowski (Rzeszów)

Analiza porównawcza dwóch metod klasyfikacji za pomocą drzew decyzyjnych z cięciami weryfikującymi

Drzewa decyzyjne z cięciami weryfikującymi stanowią modyfikację, zaproponowanych przez J. R. Quinlan'a klasyfikatorów zwanych drzewami decyzyjnymi. Są przeznaczone do automatycznego odkrywania wiedzy z danych, zwłaszcza z takich które zawierają redundantne atrybuty. Wykorzystują ową redundantność do odkrycia wiedzy charakteryzującej się większym stopniem pewności niż ma to miejsce w przypadku użycia klasycznych drzew decyzyjnych. W pracach [1] oraz [2] zaproponowano różne sposoby użycia drzew decyzyjnych z cięciami weryfikującymi w procesie klasyfikacji.

W referacie zostanie przedstawiony sposób indukcji drzew decyzyjnych z cięciami weryfikującymi oraz dokonane porównanie dwóch sposobów użycia tych drzew w procesie klasyfikacji. Najistotniejszymi cechami porównywanych podejść są złożoność obliczeniowa oraz dokładność klasyfikacji.

Literatura

[1] J. G. Bazan, S. Bazan-Socha, S. Buregwa-Czuma, L. Dydo, W. Rzasa, A. Skowron, *A Classifier Based on a Decision Tree with Verifying Cuts*, Fund. Inf. **143** (2016), no. 1-2, 1-18; IOS Press, Amsterdam.

[2] S. Buregwa-Czuma, J. G. Bazan, S. Bazan-Socha, W. Rzasa, L. Dydo, A. Skowron, *Resolving the con flicts between cuts in a decision tree with verifying cuts*, In: Polkowski, L., Yao, Y., Artiermjew, P., Ciucci, D., Liu, D., Slezak, D., Zielosko, B. (Eds.) Rough Sets International Joint Conference, IJCRS 2017, Olsztyn, Poland, July 3-7, 2017, Proceedings, Part II , Lecture Notes in Artificial Intelligence 10314 Springer 2017, pp. 403-422.

NATALIA BEDNARZ, PAWEŁ BEDNARZ

Politechnika Rzeszowska im. Ignacego Łukasiewicza (Rzeszów)

Interpretacje grafowe liczb typu Fibonacciego

Liczby typu Fibonacciego definiujemy przy pomocy równania rekurencyjnego $a_n = b_1a_{n-1} + b_2a_{n-2} + \ldots + b_ka_{n-k}$, z warunkami początkowymi $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$, gdzie $b_i \geqslant 0$ dla $i = 1, 2, \ldots, k$. Jeżeli $k = 2$ oraz $b_1 = b_2 = a_0 = a_1 = 1$, to otrzymujemy postać rekurencyjną liczb Fibonacciego $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, dla $n \geqslant 2$, z warunkami początkowymi $F_0 = F_1 = 1$.

Przedstawione zostaną dwie interpretacje grafowe liczb Fibonacciego w krawędziowo pokolorowanych grafach oraz z wykorzystaniem 2-dominujących jąder.

LITERATURA

[1] N. Bednarz, A. Włoch, I. Włoch, *The Fibonacci numbers in edge coloured unicyclic graphs,* Utilitas Mathematica, (w druku).

[2] P. Bednarz, C. Hernández-Cruz, I. Włoch, *On the existence and the number of (2-d)-kernels in graphs*, Ars Combinatoria **121** (2015), 341-351.

[3] U. Bednarz, I. Włoch, M. Wołowiec-Musiał, *Total Graph Interpretation of the Numbers of the Fibonacci Type,* J. Appl. Math. **2015** (2015), Article ID 837917, 7 pp.

[4] A. Włoch, *On 2-dominating kernels in graphs*, Australasian J. Combinatorics **53** (2012), 273-284.

URSZULA BENTKOWSKA

Uniwersytet Rzeszowski (Rzeszów)

Przechodniość rozmytych relacji przedziałowych zdefiniowana dla relacji porządku liniowego

Praca dotyczy rozmytych relacji przedziałowych [7], które stanowią jedno z uogólnień relacji rozmytych [6]. Tradycyjnie stosowany porządek dla rodziny przedziałów jest porządkiem częściowym. Aby rozwiązać problemy wynikające z braku liniowości tego porządku, została podana konstrukcja porządków liniowych dla rodziny przedziałów [3]. W zastosowaniach dotyczących przetwarzania obrazów [1] lub też problemach klasyfikacji [4] zostało udowodnione, że zastosowanie obiektów 'przedziałowych', daje lepsze rezultaty niż zastosowanie ich odpowiedników rozmytych. W szczególności zastosowanie przedziałowych relacji rozmytych w połączeniu z porządkiem liniowym zdefiniowanym w pracy [5] (szczególny przypadek porządków podanych w [3]) skutkuje uzyskaniem lepszych rezultatów w różnych zastosowaniach.

W niniejszej pracy rozważono przechodniość relacji rozmytych zdefiniowaną przy użyciu porządków liniowych [2]. Zostały przedstawione możliwe zastosowania dla podanych rozważań teoretycznych w problemach podejmowania decyzji.

LITERATURA

[1] E. Barrenechea, J. Fernandez, M. Pagola, F. Chiclana, H. Bustince, *Construction of Interval-Valued Fuzzy Preference Relations from Ignorance Functions and Fuzzy Preference Relations: Application to Decision Making*, Knowledge-Based Systems **58** (2014), 33-44.

[2] U. Bentkowska, B. Pękala, *An equivalence relation and admissible linear orders in decision making,* EUSFLAT 2017, Warszawa 11-15. 09. 2017.

[3] H. Bustince, J. Fernandez, A. Kolesárová, R. Mesiar, *Generation of linear orders for intervals by means of aggregation functions*, Fuzzy Sets Syst. **220** (2013), 69-77.

[4] J. Sanz, A. Fernandez, H. Bustince, F. Herrera, *A genetic tuning to improve the performance of fuzzy rule-based classification systems with intervalvalued fuzzy sets: degree of ignorance and lateral position*, Int. J. Approx. Reasoning **52** (2011), no. 6, 751-766.

[5] Z. S. Xu, R. R. Yager, *Some geometric aggregation operators based on intuitionistic fuzzy sets*, Int. J. General Syst. **35** (2006), 417-433.

[6] L. A. Zadeh, *Similarity relations and fuzzy orderings*, Inf. Sci. **3** (1971), 177-200.

[7] L. A. Zadeh, *The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning-I*, Inf. Sci. **8** (1975) 199-249.

Piotr BŁASZCZYK

Pedagogical University of Cracow (Kraków)

A purely algebraic proof of the Fundamental Theorem of Algebra

In 1799, Gauss gave the first widely accepted proof of the fundamental theorem of algebra (FTA). Since then, more than 200 new proofs have appeared, including new insights, as well as a diversity of tricks, techniques and general methods. [5] takes a qualitative perspective and presents six exemplary proofs of FTA classified according to the techniques involved. It pairs these proofs in accordance with the basic areas of mathematics and presents them as models of analytic, algebraic and topological proofs.

Algebraic proofs make use of the fact that odd-degree real polynomials have real roots. This assumption, however, requires analytic methods, namely, the intermediate value theorem (IVT) for real continuous functions. In our talk, we develop the idea of algebraic proof further towards a purely algebraic proof of IVT for real polynomials. In our proof, we neither use the notion of continuous function nor refer to any theorem of real and complex analysis.

The theory of real closed fields as developed in [1] and [4] provides a general framework for our talk. In fact, it provides a criterion for a field to be algebraically closed, namely: If an ordered field has the IVT property for polynomials, than the field obtained by adjoining $\sqrt{-1}$ is algebraically closed. Thus, to prove FTA it is sufficient to prove IVT for real polynomials.

To show that real polynomials have the IVT property, we apply techniques of modern algebra: we extend the field of real numbers to the non-Archimedean field of hyperreals via an ultraproduct construction and explore some relationships between the subring of limited hyperreals, its maximal ideal of infinitesimals, and real numbers. [2] and [3] provide an introduction to these techniques.

References

[1] E. Artin, O. Schreier, *Algebraische Konstruktion reeller Körper*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität **5** (1926), 85-99.

[2] P. Błaszczyk, *A Purely Algebraic Proof of the Fundamental Theorem of Algebra*, Ann. Univ. Paedagog. Crac. Studia ad Didact. Math. Pertinentia **VIII** (2016), 5-21; arXiv: 1504.05609.

[3] P. Błaszczyk, J. Major, *Calculs without the concept of limit*, Ann. Univ. Paedagog. Crac. Studia ad Didact. Math. Pertinentia **VI** (2014), 5-21.

[4] P. M. Cohn, *Algebra, vol. III*, John Wiley & Sons, Chichester, 1991.

[5] B. Fine, B. Rosenberger, *The Fundamental Theorem of Algebra*, Springer, New York, 1997.

PIOTR BŁASZCZYK

Uniwersytet Pedagogiczny im. Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie (Kraków)

Geometria Kartezjusza: od teorii proporcji do arytmetyki odcinków

1. W *La Géométrie* (1637) Kartezjusz definiuje, odwołując się do twierdzeń z *Elementów* Euklidesa, mnożenie i dzielenie odcinków oraz operację pierwiastka. Wyprowadzając równania krzywych, konstruując pierwiastki wielomianów *implicite* stosuje przemienność i łączność mnożenia, rozdzielność mnożenia względem dodawania, zgodność mnożenia z porządkiem oraz zależności, takie jak

$$a \cdot 1 = a, \ \frac{a}{a} = 1, \ \frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}, \ \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{a \cdot b}, \ \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a, \ \sqrt{a^2} = a, \ \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b},$$

gdzie a, b, c oraz 1 oznaczają odcinki.

W [2] pokazujemy, że własności te faktycznie wynikają z definicji przyjętych w *La Géométrie*, co więcej, że odcinki tworzą strukturę ciała rzeczywiście domkniętego.

2. Związek między arytmetyką odcinków Kartezjusza a grecką teorią proporcji opisujemy prawami

$$a : b :: c : d \Rightarrow a \cdot d = c \cdot b, \quad a : b :: c : d \Rightarrow a = \frac{c}{d} \cdot b,$$

gdzie $a : b :: c : d$ oznacza proporcję odcinków. W [2] przedstawimy dowody tych praw.

3. Teoria proporcji jest sformułowana w księdze V *Elementów*. W matematyce greckiej spełniała ona taką funkcję, jak liczby rzeczywiste w matematyce współczesnej.

Proporcja $a : b :: c : d$ to relacja między czterema *wielkościami*, w szczególności odcinkami. W [3] greckie pojęcie *wielkości* charakteryzujemy jako strukturę $(M, +, <)$ spełniającą aksjomaty

E1 $(\forall a, b)(\exists n \in \mathbf{N})(na > b)$

E2 $(\forall a, b)(\exists c)(a < b \Rightarrow a + c = b)$

E3 $(\forall a, b, c)(a < b \Rightarrow a + c < b + c)$

E4 $(\forall a)(\forall n \in \mathbf{N})(\exists b)(a = nb)$

E5 $(\forall a, b, c)(\exists d)(a : b :: c : d)$.

Aksjomaty E1-E3 interpretujemy jako charakterystykę grupy archimedesowej.

4. Pojęcie ciała uporządkowanego wprowadził Hilbert w roku 1899. W [1] opisujemy XIX-wieczną recepcją greckiego pojęcia wielkości. W referacie omawiamy rolę *La Géométrie* w procesie kształtowania się pojęcia ciała uporządkowanego: pokazujemy, że Kartezjusz zastąpił relację proporcji mnożeniem i dzieleniem odcinków, dzięki czemu *La Géométrie* stanowi punt zwrotny między grecką teorią proporcji a współczesnością.

LITERATURA

[1] P. Błaszczyk, *Nota o rozprawie Otto Höldera Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass*, Ann. Univ. Paedagog. Crac. Studia ad Didact. Math. Pertinentia **V** (2013), 129-142.

[2] P. Błaszczyk, K. Mrówka, *Kartezjusz, „Geometria". Tłumaczenie i komentarz*, Universitas, Kraków, 2015.

[3] P. Błaszczyk, K. Mrówka, *Euklides, „Elementy", Księgi V–VI. Teoria proporcji i podobieństwa*, Copernicus Center Press, Kraków, 2013.

DOROTA BRÓD

Politechnika Rzeszowska im. Ignacego Łukasiewicza (Rzeszów)

Uogólnienia liczb typu Fibonacciego

Ciągiem typu Fibonacciego nazywamy ciąg zdefiniowany za pomocą rekurencji

$$a_n = b_1 a_{n-1} + b_2 a_{n-2} + \ldots + b_k a_{n-k} \quad \text{dla} \quad n \geqslant k,$$

gdzie $k, b_i \in \mathbf{Z},\ k \geqslant 2,\ b_i \geqslant 0$ oraz $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ są danymi liczbami całkowitymi. Wyrazy tych ciągów nazywamy liczbami typu Fibonacciego. Zaliczamy do nich m.in. znane liczby Fibonacciego F_n ($F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$), liczby Lucasa L_n ($L_0 = 2,\ L_1 = 1,\ L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$), liczby Jacobsthala J_n ($J_0 = 0,\ J_1 = 1,\ J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$).

W literaturze znanych jest wiele jednoparametrowych oraz wieloparametrowych uogólnień liczb Fibonacciego, Lucasa, Jacobsthala i innych liczb tego typu. Przedstawione zostanie pewne dwuparametrowe uogólnienie liczb Fibonacciego, tzw. odległościowe s-liczby Fibonacciego $F_s(k,n)$ zdefiniowane następująco:

$$F_s(k,n) = s^{k-2} F_s(k, n-k+1) + s^{k-1} F_s(k, n-k) \quad \text{dla} \quad n \geqslant k,\ k, s \in \mathbf{N},\ k \geqslant 2,$$

z warunkami początkowymi $F_s(k,n) = 1$ dla $n = 0, 1, \ldots, k-2$, $F_s(k, k-1) = s^{k-2}$ oraz jednoparametrowe uogólnienie liczb Jacobsthala - liczby r-Jacobsthala $J(r,n)$ zdefiniowane za pomocą równania rekurencyjnego rzędu drugiego

$$J(r,n) = 2^r J(r, n-1) + (2^r + 4^r) J(r, n-2) \quad \text{dla} \quad n \geqslant 2,\ r \in \mathbf{N}_0,$$

z warunkami początkowymi $J(r,0) = 1,\ J(r,1) = 1 + 2^{r+1}$.

Pokazane zostaną pewne kombinatoryczne i grafowe interpretacje tych liczb oraz ich różne własności. Przedstawione wyniki pochodzą z artykułów [1] i [2].

Literatura

[1] D. Bród, *On two-parameters generalization of Fibonacci numbers*, Math. Applicanda **45** (2017), no. 1, 81-91.

[2] D. Bród, *On a new Jacobsthal-like sequence*, Ars Combinatoria (przyjęta do druku).

JACEK CHUDZIAK

Uniwersytet Rzeszowski (Rzeszów)

Charakteryzacja funkcji typu Goldsteina-Einhorna

Funkcje zniekształcające prawdopodobieństwo odgrywają istotną rolę w różnych modelach podejmowania decyzji w warunkach ryzyka. W literaturze można znaleźć szereg przykładów takich funkcji. W szczególności W. M. Goldstein i H. J. Einhorn w pracy [1] wprowadzili następującą rodzinę funkcji zniekształcających prawdopodobieństwo

$$g_{a,\gamma}(p) = \frac{ap^\gamma}{ap^\gamma + (1-p)^\gamma} \quad \text{dla} \quad p \in [0,1], \tag{1}$$

gdzie $a, \gamma > 0$. W referacie przedstawione zostaną wyniki dotyczące charakteryzacji funkcji postaci (1).

LITERATURA

[1] W. M. Goldstein, H. J. Einhorn, *Expression theory and the preference reversal phenomenon*, Psychological Review **94** (1987), 236-254.

MAŁGORZATA CHUDZIAK

Uniwersytet Rzeszowski (Rzeszów)

O przedłużaniu rozwiązań równań typu Popoviciu na grupach

Niech M, N, m, n bedą ustalonymi dodatnimi liczbami całkowitymi. Załóżmy, że $(G, +)$ i $(H, +)$ są grupami, $(G, +)$ jest jednoznacznie podzielna przez m i n, zaś $(H, +)$ jest jednoznacznie podzielna. Niech S będzie podgrupą grupy $(G, +)$ podzielną przez m i n. Pokażemy, że jeżeli funkcja $f : S \to H$ spełnia równanie

$$\begin{aligned} &Mf\left(\frac{x+y+z}{m}\right) + f(x) + f(y) + f(z) = \\ &= N\left[f\left(\frac{x+y}{n}\right) + f\left(\frac{y+z}{n}\right) + f\left(\frac{z+x}{n}\right)\right] \quad \text{dla} \quad x, y, z \in S, \end{aligned}$$

to istnieje dokładnie jedna funkcja $F : G \to H$ spełniająca równanie

$$\begin{aligned} &MF\left(\frac{x+y+z}{m}\right) + F(x) + F(y) + F(z) = \\ &= N\left[F\left(\frac{x+y}{n}\right) + F\left(\frac{y+z}{n}\right) + F\left(\frac{z+x}{n}\right)\right] \quad \text{dla} \quad x, y, z \in G \end{aligned}$$

taka, że

$$F(x) = f(x) \quad \text{dla} \quad x \in S.$$

RENATA DŁUGOSZ[1], PIOTR LICZBERSKI[1]
EDYTA TRYBUCKA[2]

[1] *Politechnika Łódzka* (Łódź)
[2] *Uniwersytet Rzeszowski* (Rzeszów)

Extremal problems for functions with Bavrin's type factorization in $\mathbf{C}^n$

During the lecture we will present some information about holomorphic functions of several complex variables with a factorization of their Temljakov transform. Firstly will considered some inclusions between the families $\mathcal{C}_\mathcal{G}, \mathcal{M}_\mathcal{G}, \mathcal{N}_\mathcal{G}, \mathcal{R}_\mathcal{G}, \mathcal{V}_\mathcal{G}$ of such holomorphic functions on complete n-circular domain $\mathcal{G}$ of $\mathbf{C}^n$ in some papers of Bavrin. A motivation of our investigations is a condensation of the mentioned inclusions by some new families of Bavrin's type. Hence we consider some families $\mathcal{K}_\mathcal{G}^k$, $k \geqslant 2$, of holomorphic functions $f : \mathcal{G} \to \mathbf{C}$, $f(0) = 1$, defined also by a factorization of $\mathcal{L}f$ onto factors from $\mathcal{C}_\mathcal{G}$ and $\mathcal{M}_\mathcal{G}$. As the main reslts we will present some extremal problems on $\mathcal{K}_\mathcal{G}^k$.

REFERENCES

[1] I. I. Bavrin, *A class of regular bounded functions in the case of several complex variables and extreme problems in that class*, Moskov Oblast. Ped. Inst., Moscow (1976), 1-69 (in Russian).

[2] R. Długosz, E. Leś, *Embedding theorems and extreme problems for holomorphic functions on circular domains of* $\mathbb{C}^n$, Complex Variables and Elliptic Eq. **59** (2014), 883-899.
[3] R. Długosz, P. Liczberski, *An application of hypergeometric functions to a construction in several complex variables*, J. d'Analyse Mathematique, (2017) (accepted for publication).
[4] R. Długosz, *Embedding theorems for holomorphic functions of several complex variables*, J. Appl. Anal. **19** (2013), 153-165.
[5] E. Leś-Bomba, P. Liczberski, *On some family of holomorphic functions of several complex variables*, Sci. Bull. of Chelm, Sec. of Math. and Computer Sci. **2** (2007), 7-16.
[6] P. Liczberski, J. Połubiński, *On* (j,k)*-symmetrical functions*, Math. Bohemica **120** (1995), 13-28.

Renata DŁUGOSZ, Agnieszka NIEDZIAŁKOWSKA

Centrum Nauczania Matematyki i Fizyki Politechniki Łódzkiej (Łódź)

Wybrane metody i narzędzia kształcenia studentów

Podczas wykładu zaprezentowane zostaną wybrane metody i narzędzia kształcenia, które są używane na co dzień w pracy dydaktycznej na Politechnice Łódzkiej. Formy te umożliwiają poprawę jakości nauczania matematyki i mogą wspierać proces dydaktyczny.

Narzędzia dydaktyczne w postaci filmów video, zawierające obrazy, grafikę i dźwięk, a także materiały e-learningowe - preferujące tekst i liczby, quizy uczące i sprawdzające, to tylko wybrane spośród tych, które chcemy zaprezentować.

Spośród metod kształcenia przedstawimy taką, która pobudza kreatywność, rozwija samodzielność i systematyczność pracy studenta. W związku z tym zmienia się rola nauczyciela, który staje się doradcą, obserwatorem i przewodnikiem w rozwoju swoich studentów. Metodą taką jest projekt, wykorzystywany do prowadzenia wybranych ćwiczeń na naszej uczelni.

W czasie wykładu zaprezentowane zostaną również nowe formy pracy wykorzystywane przez nauczycieli akademickich w procesie promocji uczelni.

Stanisław DOMORADZKI

Uniwersytet Rzeszowski (Rzeszów)

Pierwsze trzy dekady działalności Polskiego Towarzystwa Matematycznego (1920-1950)

Pierwsze polskie Towarzystwo Matematyczne powstało stosunkowo późno, bo dopiero w 1917 roku we Lwowie. Część matematyków prowadziła działalność naukową i organizacyjną w innych towarzystwach. Towarzystwo Matematyczne w Krakowie, które powołane zostało 2 kwietnia 1919 r., przekształciło się w 1920 r. w Polskie Towarzystwo Matematyczne, terenem jego działalności była cała Polska. Celem Towarzystwa było *wszechstronne pielęgnowanie matematyki czystej i stosowanej* poprzez odczyty, publikacje prac matematycznych, współpracę z matematykami zagranicznymi, organizowanie zjazdów matematycznych.

PTM pełniło rolę organizatora życia matematycznego w Polsce do 1948 r., do chwili powstania Państwowego Instytutu Matematycznego, przemianowanego w 1951 r. na Instytut Matematyczny PAN. PTM reprezentowało również matematyków polskich na arenie międzynarodowej, od 1921 r. brało udział w pracach Międzynarodowej Unii Matematycznej.

W referacie przedstawimy działalność PTM w pierwszych trzech dekadach jego funkcjonowania.

Юрий Дробышев (Yu. A. Drobyshev)

Калужский филиал Финансового университета при Правительстве Российской Федерации (Калуга)
Financial University under the Government of the Russian Federation (Kaluga, Russia)

Нравственное воспитание студентов в процессе обучения истории математики (Moral education of students in the process of studying the history of mathematics)

В настоящее время перед системами образования различных стран стоит задача формирования высоконравственной личности, разделяющей традиционные духовные ценности, обладающей актуальными знаниями и умениями, способной реализовать свой потенциал в условиях современного общества, Ее решение зависит от того, как будет проходить взаимодействие процессов обучения и воспитания при изучении различных дисциплин, в том числе математики.

Значительным воспитательным потенциалом при обучении студентов математике обладает ее персоналистическая составляющая. Использование ее содержания создает основу для осуществления в первую очередь нравственного воспитания. Основными направлениями воспитательной работы, осуществляемой за счет потенциала персоналистической составляющей истории математики, являются такие, как:

- формирование нравственного идеала личности на основе рассмотрения и анализа моральных качеств ученых, их проявлений в поступках, связанных с личной жизнью и профессиональной деятельностью;
- воспитание чувства патриотизма через осознание принадлежности к родному краю и воспитание чувства гордости за учёных-земляков;
- формирование волевых качеств личности и уважения к труду через показ тех трудностей, с которыми приходилось сталкиваться учёным в детстве и во взрослой жизни, и способов преодоления их;
- развитие уважения к народам разных стран через знакомство с достижениями их великих ученых;
- формирование нравственных качеств через включение студентов в деятельность и создание ситуаций, требующих определить им линию поведения на основе морального выбора.

Представленные направления воспитательной работы и материалы истории математики, обеспечивающие их реализацию, раскрыты в учебном пособии [1] и будут представлены в докладе.

Литература

[1] Ю. А. Дробышев, И. В. Дробышева, О. Б. Тарас, *Воспитание личностных качеств студентов*, Материалы персоналистического компонента истории математики, Москва, 2017.

At present time before educational systems of different countries there is a task to form a highly moral personality, dividing traditional spiritual values, having actual knowledge and skills, who is able to realize the potential living in the conditions of the modern society. The its decision depends upon the interaction of the education and training in studying different subjects, including mathematics. A significant educational potential in the teaching of students to mathematics has its personalistic component. The use of its content creates the basis for moral education. The main directions of educational work, carried out at the expense of the potential of the personalistic component of the history of mathematics, are such as: - the formation of the moral ideal of the individual on the basis of consideration and analysis of the moral qualities of scientists, their manifestations in actions related to personal life and professional activity; - the education of a sense of patriotism through the recognition of belonging to the native land and the education of a sense of pride for fellow countrymen; - the formation of strong-willed qualities of the individual and respect for work through showing the difficulties that the scientist had to face in childhood and in adulthood and ways of overcoming them; - the development of respect for the peoples of different countries through familiarity with the achievements of their great scientists; - the formation of moral qualities through the inclusion of students in activities and the creation of situations that require them to determine their behavior on the basis of moral choice. The presented directions of educational work and materials of the history of mathematics that ensure their implementation are disclosed in the training manual [1] and will be presented in the report.

References

[1] Yu. A. Drobyshev, I. V. Drobysheva, O. B. Taras, *Education of personal qualities of students: materials of the personalistic component of the history of mathematics*, Moscow, 2017.

Ирина Дробышева (I. V. Drobysheva)

Калужский филиал Финансового университета при Правительстве Российской Федерации (Калуга)
Financial University under the Government of the Russian Federation (Kaluga, Russia)

Компетентностно-ориентированное обучение студентов вузов

(Competence-oriented teaching students)

Образовательные программы подготовки студентов по различным специальностям и направлениям включают изучение математических дисциплин. Поэтому переход российской системы высшего образования к компетентностной парадигме поставил перед преподавателями математики технических, гуманитарных, педагогических, экономических и других вузов ряд одинаковых задач. К основным из них относятся:

– определение оснований для выбора компетенций, формирование которых целесообразно при изучении математических дисциплин;
– определение содержательного наполнения компонентов формируемых компетенций;
– выявление условий, выполнение которых необходимо для осуществления компетентностно-ориентированного обучения студентов математике;
– определение элементов содержательного компонента обучения математике, необходимых для формирования у студентов компетенций и диагностирования уровня овладения ими;
– выявление особенностей процессуального компонента компетентностно-ориентированного обучения математике.

Исходя из роли математики в различных видах профессиональной деятельности, к выполнению которых должен быть готов выпускник вуза, приоритетным при обучении студентов математике является либо ее гуманитарный потенциал, либо прикладной, либо собственно - математический. На этой основе установлено соответствие между направлением подготовки и компетенциями, формируемыми при обучении математике.

Специфика будущей профессиональной деятельности и направленность на формирование у студентов при обучении математике способности выполнять трудовые функции, представленные в соответствующем Профессиональном стандарте, определяют содержательное наполнение компонентов формируемых компетенций. В работах [1], [2] обоснованы условия компетентностно-ориентированного обучения математике и раскрыт авторский подход к его осуществлению, основные положения которого будут представлены в докладе.

Литература

[1] И. В. Дробышева, Ю. А. Дробышев, *О необходимых условиях компетентностно ориентированного обучения математике студентов вузов*, Педагогический журнал Башкортостана №4 (2012), 57-61.

[2] И. В. Дробышева, Ю. А. Дробышев, *Технология дифференцированного компетентностно-ориентированного обучения студентов математике*, Издательство: ООО «ТРП», 2016.

Educational programs of training students in different specialties and directions include the study of mathematics. Therefore, the transition of the Russian system of higher education to a competence paradigm is put some of the same problems before the teachers of mathematics technical, humanitarian, educational, economic and other universities. The main ones are:

- determination of the grounds for choosing competencies, the formation of which is expedient in the study of mathematical disciplines;
- determination the content of competency components;
- identification of the conditions, the implementation of which is necessary for the implementation of competence-oriented teaching of students in mathematics;
- the definition of elements of the content component of teaching mathematics, necessary for the formation of students' competencies and diagnosing the level of mastering them;
- identification of the features of the procedural component of competency-oriented learning mathematics.

Proceeding from the role of mathematics in various types of professional activity, to which the graduate of the university should be ready, the priority in the teaching of students to mathematics is either its humanitarian potential, either applied or purely mathematical. This is the basis for establishing a correspondence between the direction of preparation and the competences that we will form in the study of mathematics.

The specifics of future professional activity and focus on the formation of students in teaching mathematics ability to perform job functions represented in the appropriate Professional standard, determine the content of the components formed competencies.

The conditions competence-oriented mathematics teaching are justified in [1, 2]. There disclosed the author's approach to its implementation, the main provisions of which are presented in the report.

References

[1] I. V. Drobysheva, Yu. A. Drobyshev, *On the necessary conditions of competence based learning mathematics students*, Pedagogical J. of Bashkortostan no. 4 (2012), 57-61.

[2] I. V. Drobysheva, Yu. A. Drobyshev, *The technology of the differentiated competence-oriented training of students in mathematics*, Publishing House: LLC „TRP", 2016.

Kh. DROHOMYRETSKA, P. KALENIUK, M. KLAPCHUK
G. PONEDILOK

Lviv Polytechnic National University (Lviv, Ukraine)

An overview of Calculus course – content, tools, and methods

Calculus is a multi-purpose course that serves as the foundation for many disciplines and supports many topics in mathematics. Depending on the target audience and student specialities its programs are somewhat different. Due to introduction of modern technologies there is a tendency to reduce lecture hours and to increase the amount of materials for self-directed learning. This requires a complete methodological support and useful tools for students to develop better understanding of the basic concepts. Textbooks are an important part of teaching mathematics. We introduce here Calculus textbook [1] published last year at Lviv Polytechnic National University and adopted for specialists in Engineering, Computer Science, Information Technology.

One of the main tasks posed by the authors of the textbook is to integrate calculus course into the fundamental block of disciplines for the training of a specialist and to make calculus course more coherent with other fields. Some examples of how this was organized in the textbook is:

- well-structured material begins with pre-calculus part containing the main concepts of logic;
- each section is completed, such as the one that is devoted to the parametric function; its complete study by means of differential calculus is demonstrated; the algorithm for such a study, the construction of the graph is indicated;
- due to their practical application, such topics were included that might go beyond the classical course, for instance, recursive sequences as it is very important for informatics;
- we present how students are required to use calculus in future courses. Thus, for example, differential equations are already introduced and the simplest ones are constructed for description some physical and geometric problems;
- another purpose of the work is to inform students about current trends and directions of mathematics, in particular q-calculus is quite a popular subject today, so along with the usual derivative, the q-derivative is introduced;
- the textbook enriched with a large number of color graphics and drawings, historical references and a large list of literature of different years of the publication.

Nowadays, it is common to use support tools like e-learning to increase the interaction between teacher and students. We use Moodle virtual learning environment where students can find online modules to develop autonomous and collaborative learning. It accompanies and reinforces the textbook, allowing students to understand the power of calculus course and encourage them to become deep learners.

References

[1] Kh. Drohomyretska, P. Kaleniuk, M. Klapchuk, G. Ponedilok, *Mathematical analysis of one real variable functions*, Publishing House of Lviv Polytechnic, Lviv, 2016.

PAWEŁ DRYGAŚ

Uniwersytet Rzeszowski (Rzeszów)

Uninormy na kracie

Uninormy są szczególnym przypadkiem półgrup uporządkowanych. Łączność jest jedną z najważniejszych własności działań. Przykładami działań łącznych są dodawanie i mnożenie liczb rzeczywistych. Innych działań łącznych szukano jako rozwiązań równania łączności.

Pojęcie uninormy zostało wprowadzone przez R. Yagera, A. Rybalova w 1996 r. w celu uogólnienia pojęć norm i konorm trójkątnych na przedziale jenostkowym, a w 2015 uogólnione na kraty przez F. Karaçal, R. Mesiara.

Podczas prezentacji przedstawimy strukturę oraz pewne własności uninorm na kracie. Podamy pewne konstrukcje uninorm pozwalające na otrzymywanie uninorm o z góry zadanych własnościach, takich jak idempotentność, czy lokalna wewnętrzność. Całość zilustrujemy odpowiednimi przykładami.

LITERATURA

[1] G. D.Çaylı, P. Drygaś, *Characterization of idempotent uninorms on some class of bounded lattices*, Information Sciences (submited).
[2] F. Karaçal, R. Mesiar, *Uninorms on bounded lattices*, Fuzzy Sets and Systems **261** (2015) 33-43.
[3] E. P. Klement, R. Mesiar, E. Pap, *Triangular norms*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.
[4] R. Yager, A. Rybalov, *Uninorm aggregation operators*, Fuzzy Sets and Systems **80** (1996), 111-120.

JACEK DZIOK

University of Rzeszów (Rzeszów)

Extreme points of classes of harmonic functions

A real-valued function u is said to be harmonic in a domain $D \subset \mathbf{C}$ if it has continuous second order partial derivatives in D which satisfy the Laplace equation

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

We say that a complex-valued continuous function $f : D \to \mathbf{C}$ is harmonic in D if both functions $u := \operatorname{Re} f$ and $v := \operatorname{Im} f$ are real-valued harmonic functions in D. We note that every complex-valued function f harmonic in D with $0 \in D$, can be uniquely represented as $f = h + \overline{g}$, where h, g are analytic functions in D with $g(0) = 0$. Then we call h the analytic part and g the co-analytic part of f. It is easy to verify that the Jacobian of f is given by

$$J_f(z) = |h'(z)|^2 - |g'(z)|^2 \quad (z \in D).$$

The mapping f is locally univalent if $J_f(z) \neq 0$ in D. A result of Lewy [2] shows that the converse is true for harmonic mappings. Therefore, f is locally univalent and sense-preserving if and only if $|h'(z)| > |g'(z)|$ for $z \in D$.

Let $\mathcal{H}$ denote the class of harmonic functions in the unit disc $\mathbf{U} := \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$.

We consider the usual topology on $\mathcal{H}$ defined by a metric in which a sequence $\{f_n\}$ in $\mathcal{H}$ converges to f if and only if it converges to f uniformly on each compact subset of $\mathbf{U}$. It follows from the theorems of Weierstrass and Montel that this topological space is complete. The Krein-Milman theorem (see [1]) implies the following result.

Theorem. *Let $\mathcal{F}$ be a non-empty compact convex subclass of the class $\mathcal{H}$ and $\mathcal{J}:\mathcal{H}\to\mathbf{R}$ be a real-valued, continuous and convex functional on $\mathcal{F}$. Then*

$$\max\{\mathcal{J}(f): f\in\mathcal{F}\} = \max\{\mathcal{J}(f): f\in E\mathcal{F}\},$$

where $E\mathcal{F}$ denote the set of extreme points of $\mathcal{F}$.

By using the theorem we obtain estimations of classical functionals on some classes of harmonic functions.

References

[1] M. Krein, D. Milman, *On the extreme points of regularly convex sets*, Stud. Math. **9** (1940), 133-138.
[2] H. Lewy, *On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings*, Bull. Amer. Math. Soc. **42** (1936), 689-692.

Magdalena FIGIEL

Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej (Lublin)

Charakteryzacja brzegowa odwzorowań quasi-regularnych koła jednostkowego na siebie

W 1987 r. J. Krzyż scharakteryzował brzegowe wartości odwzorowań quasi-konforemnych koła jednostkowego $\mathbf{D}:=\{z\in\mathbf{C}:|z|<1\}$ na siebie. Dokonał tego poprzez przeniesienie na okrąg jednostkowy $\mathbf{T}:=\{z\in\mathbf{C}:|z|=1\}$ warunku quasi-symetrii Beurlinga-Ahlforsa dla rosnących homeomorfizmów osi rzeczywistej $\mathbf{R}$ na siebie. Poster dotyczy uogólnienia wyniku Krzyża na klasę odwzorowań quasi-regularnych F koła $\mathbf{D}$ na siebie, które mają ciągłe rozszerzenie F^* na domknięcie koła $\mathbf{D}$ i spełniają warunek $F^*(\mathbf{T})\subset\mathbf{T}$.

Poster jest oparty na wynikach uzyskanych wspólnie z Dariuszem Partyką.

Marlena FILA

Uniwersytet Pedagogiczny im. Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie (Kraków)

O rozprawie Bernarda Bolzana *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetzes Resultat gewähren, wenigstens eine reele Wurzel der Gleichung liege*

W 1817 roku Bernard Bolzano, praski matematyk, filozof i teolog napisał pracę pod tytułem *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetzes Resultat gewähren, wenigstens eine reele Wurzel der Gleichung liege.* Głównym jej celem było udowodnienie twierdzenia o zerowaniu się funkcji wielomianowej w przedziale domkniętym, gdy na końcach przedziału funkcja przyjmuje wartości przeciwnych znaków. Swój dowód zamierzał przeprowadzić w sposób *czysty* i *analityczny*, czyli m.in. wolny od nawiązań geometrycznych. Dlatego Bolzana uznać można za prekursora nurtu arytmetyzacji analizy.

W rozprawie znajdujemy także dowód ogólnego twierdzenia o przyjmowaniu wartości pośrednich przez funkcję ciągłą (IVT). Dziś wiemy, że IVT jest równoważne aksjomatowi ciągłości, dlatego w swoim dowodzie Bolzano musiał powołać się na jakąś inną wersję aksjomatu ciągłości albo jego dowód zawiera lukę. Pokażemy, że w dowodzie IVT Bolzano powołuje się na aksjomat ciągłości w postaci zasady supremum.

Literatura

[1] P. Błaszczyk, *A purely algebraic proof of the Fundamental Theorem of Algebra*, Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia VIII 2016, 6-22.

[2] H. Teismann, *Toward a More Complete List of Completeness Axioms*, The American Mathematical Monthly 2013, 99-114.

[3] B. Bolzano, *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetzes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*, Gottlieb Hasse, Praga, 1817.

[4] H. Meschkowski, W. Nilson, *Georg Cantor Briefe*, Springer-Verlag, 1991.

[5] M. Rosen (ed.), *Exposition by Emil Artin*, AMS-LMS, 2007.

Anna FUTA

Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej (Lublin)

Nierówność typu Schwarza dla klasy funkcji harmonicznych w kole jednostkowym z pewną normalizacją brzegową

Niech T_0, T_1 i T_2 będą łukami domkniętymi okręgu jednostkowego $\mathbf{T} := \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$ o dodatniej długości, sumarycznej długości 2π i spełniających równość $T_0 \cup T_1 \cup T_2 = \mathbf{T}$. W przypadku symetrycznym łuków o jednakowej długości $2\pi/3$ D. Partyka i J. Zając uzyskali w 2015 r. dokładne oszacowanie

$$|F(z)| \leqslant \frac{4}{3} - \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tg}\Big(\frac{\sqrt{3}}{1+2|z|}\Big) , \quad z \in \mathbf{D} := \{\zeta \in \mathbf{C} : |\zeta| < 1\} ,$$

gdzie $F : \mathbf{D} \to \mathbf{D}$ jest funkcją harmoniczną spełniającą następujący warunek brzegowy: *dla każdego $k \in \{0, 1, 2\}$ i prawie każdego $z \in T_k$ granica radialna funkcji F w punkcie z należy do otoczki wypukłej łuku T_k i zera.* Poster dotyczy uogólnienia tego oszacowana na przypadek łuków T_0, T_1 i T_2 o dowolnej długości dodatniej.

Poster jest oparty na wynikach uzyskanych wspólnie z Dariuszem Partyką.

Marek GOLASIŃSKI

University of Warmia and Mazury in Olsztyn (Olsztyn)

Rings of analytic and smooth functions on the circle

Let $\mathbf{R}$ and $\mathbf{C}$ be the fields of the real and complex numbers and denote by

$$\mathbf{S}^1 = \mathbf{S}^1(\mathbf{R}) = \Big\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 |\ x^2 + y^2 = 1\Big\} \quad \text{and} \quad \mathbf{S}^1(\mathbf{C}) = \Big\{(x, y) \in \mathbf{C}^2 |\ x^2 + y^2 = 1\Big\}$$

the unit circle over $\mathbf{R}$ and $\mathbf{C}$, respectively.

First, we analyse the ring of real-valued (resp. complex-valued) analytic functions $C^\omega(\mathbf{S}^1, \mathbf{R})$ (resp. $C^\omega(\mathbf{S}^1, \mathbf{C})$) on the circle $\mathbf{S}^1$ and show:

Theorem 1. *The ring* $C^\omega(\mathbf{S}^1,\mathbf{R})$ *is a Dedekind domain with* $\mathrm{Cl}(C^\omega(\mathbf{S}^1,\mathbf{R}))=\mathbf{Z}/2$ *and the ring* $C^\omega(\mathbf{S}^1,\mathbf{C})$ *is a PID.*

Then, we move to the ring $C^\omega(\mathbf{S}^1(\mathbf{C}),\mathbf{C})$ of analytic functions on the circle $\mathbf{S}^1(\mathbf{C})$ to state:

Theorem 2. *The ring* $C^\omega(\mathbf{S}^1(\mathbf{C}),\mathbf{C})$ *is isomorphic to the localization* $C^\omega(\mathbf{C})_{\{z^n\}_{n\geqslant 0}}$ *of the ring* $C^\omega(\mathbf{C})$ *of analytic functions on* $\mathbf{C}$.

Notice that Theorems 1-2 generalize some results derived from [1] and [2].

At the end, we analyse the ring $C^\infty(\mathbf{S}^1,\mathbf{R})\supseteq C^\omega(\mathbf{S}^1,\mathbf{R})$ of smooth real functions on the circle $\mathbf{S}^1$ to get:

Theorem 3. *The ring* $C^\infty(\mathbf{S}^1,\mathbf{R})$ *is not Noetherian, but its maximal ideals are exactly of the form*

$$m_p=\{f\in C^\infty(\mathbf{S}^1,\mathbf{R})|\ f(p)=0\},$$

for $p=(x_p,y_p)\in\mathbf{S}^1$, *which are generated by the two functions* $(x,y)\mapsto x-x_p$ *and* $(x,y)\mapsto y-y_p$ *for* $(x,y)\in\mathbf{S}^1$.

References

[1] H. G. Dales, *The ring of holomorphic functions on a Stein compact set as a unique factorization domain*, Proc. Amer. Math. Soc. **44** (1974), no. 1, 88-92.

[2] J. Frisch, *Points de platitude d'un morphisme d'espaces analytiques complexes*, Invent. Math. **4** (1967), 118-138.

Piotr GROCHOWALSKI, Krzysztof PANCERZ
Zbigniew SURAJ

University of Rzeszów (Rzeszów)

The first step toward development of a computer tool for Petri nets over ontological graphs

The practical use of any Petri net classes is firmly dependent on the existence of adequate computer tools. We present the first version of a computer tool for a new class of high-level Petri nets, called generally Petri nets over ontological graphs. Petri nets over ontological graphs were introduced in [4]. They combine important properties of two methodologies used for specifying and modelling selected domains of interest, namely Petri nets [3] that are a powerful graphical and formal tool to model dynamic systems and also ontologies [2] used to specify the concepts and semantic relationships among them comprising the vocabulary of particular domains. The presented tool is being developed as one of the parts of the lager tool, called *Petri Net System* (PNeS), covering a wide range of classes of Petri nets. In the created tool, we use the Web Ontology Language (OWL2) [1] to specify ontological graphs incorporated into Petri nets.

References

[1] B. Motik, P. F. Patel-Schneider, B. Parsia (eds.), *OWL 2 Web Ontology Language: Structural Specification and Functional-Style Syntax (Second Edition)*, W3C Recommendation, 2012.

[2] R. Neches, R. Fikes, T. Finin, T. Gruber, R. Patil, T. Senator, W. Swartout, *Enabling technology for knowledge sharing*, AI Magazine **12** (1991), no. 3, 36-56.

[3] W. Reisig, *Petri Nets*, Springer, Berlin, 1985.

[4] J. Szkoła, K. Pancerz, *Petri nets over ontological graphs: Conception and application for modelling tasks of robots*, In: Polkowski, L., et al. (eds.) Rough Sets, LNAI, **10313** (2017), 207-214, Springer International Publishing, Cham.

Edyta GRUSZCZYK-KOLCZYŃSKA

Akademia Pedagogiki Specjalnej im. Marii Grzegorzewskiej w Warszawie (Warszawa)

Ćwierć wieku modernizacji nauczania matematyki. Przyczyny, sposoby i konsekwencje wprowadzania idei nowej matematyki w edukacji matematycznej dzieci

W przedszkolu i w pierwszych latach nauki szkolnej dzieci konstruują w swoich umysłach zarysy pojęć i umiejętności matematycznych. Są to fundamenty bodaj wszystkich kompetencji matematycznych kształconych w kolejnych latach edukacji. Jeżeli są kiepskie, wcześniej lub później spodziewać się trzeba niepowodzeń w nauce matematyki. Gdy są mocne, zbuduje się na nich solidny gmach wiedzy i umiejętności matematycznych zapewniający dzieciom sukcesy edukacyjne i życiowe.

Choćby z tego powodu warto zastanowić się, co jest przyczyną tego, że od lat co czwarty uczeń klas początkowych doznaje niepowodzeń w nauce matematyki[1]. Nauczyciele matematyki skarżą się, że uczniowie klas IV często żenująco mało wiedzą i potrafią z matematyki. Potwierdzają to wyniki *Ogólnopolskiego Badania Umiejętności Trzecioklasistów*[2].

Szukając przyczyn tego niepokojącego problemu ustaliłam kamienie milowe historii edukacji matematycznej w Polsce od czasów drugiej wojny światowej, w tym ćwierć wieku modernizacji nauczania początkowego. Wyniki tego tych arcyciekawych badań naukowych przedstawię w referacie.

Przypomnę, że modernizacja nauczania matematyki polegała na prowadzeniu idei *nowej matematyki* do kształcenia dzieci przedszkolnych i uczniów klas początkowych. Zmieniono złożenia procesu nauczania dzieci oraz treści matematycznej edukacji, metody i środki dydaktyczne oraz koncepcję kształcenia nauczycieli. Żeby pokazać skalę wprowadzanych zmian omówię:

- powody, dla których rozpoczęto modernizację nauczania początkowego matematyki, w tym:
  a) wyniki badań z lat pięćdziesiątych wskazujące na niepokojąco niski poziom wiadomości i umiejętności matematycznych uczniów i przekonanie, że słabym wynikom nauczania matematyki towarzyszy przeciążenie umysłów uczniów przestarzałymi wiadomościami,
  b) wydarzenia świadczące o fascynacji koncepcją *nowej matematyki* realizowaną w krajach zachodnich;
- konsekwencje tzw. eksperymentu krakowskiego: a) wdrażanie koncepcji *nowej matematyki* w latach 1961-1964, b) rozszerzenie tego eksperymentu w 256 szkołach w 9-ciu województwach Polski;
- założenia respektowane w polskiej wersji wdrażania *nowej matematyki* w edukacji matematycznej dzieci. Na podstawie analizy treści kształcenia z obszaru *zbiory i ich elementy* w programach edukacyjnych dla przedszkoli i klas początkowych opracowanych w konwencji *nowej matematyki* wskażę poważne uchybienia psychologiczne i pedagogiczne;

[1] Więcej informacji w publikacji *Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki. Przyczyny, diagnoza, zajęcia korekcyjno-wyrównawcze*, WSiP, Warszawa 1992, dziewiąte wydanie 2013.

[2] Por. *Ogólnopolskie Badanie Umiejętności Trzecioklasistów Raport OBUT 2013* (red. A. Pregler, Instytut Badań Edukacyjnych, Warszawa 2013, publikacja współfinansowana przez UE). Na s. 7 tego raportu podana jest informacja: średni wynik ucznia piszącego test matematyczny wyniósł 10,62 punktu na 18 możliwych. W *Raporcie z ogólnopolskiego badania umiejętności trzecioklasistów OBUT^m 2014* (opracowany w Instytucie Badań Edukacyjnych, zrealizowany w ramach programu Kapitał ludzki), na s.7 znajduje się informacja – średni wynik trzecioklasisty biorącego udział w badaniach wynosi 7,9 punktu na 14 możliwych.

- zadziwiające efekty oraz istotne mankamenty:
  a) form i metod stosowanych w zakresie zmiany nastawienia nauczycieli do modernizacji nauczania matematyki,
  b) intensywnego szkolenia nauczycieli do wdrażania koncepcji *nowej matematyki* w przedszkolach i szkołach,
  c) stosowanych pomocy dydaktycznych typu *liczby w kolorach*, *klocki logiczne*, d) podręczników i zeszytów ćwiczeń dla uczniów oraz publikacji dla nauczycieli.

W drugiej części referatu wskażę ważniejsze powody odstąpienia od modernizacji nauczania początkowego. Wyjaśnię też, dlaczego publikacje dotyczące niepowodzeń w nauce matematyki uczniów objętych modernizacją nauczania matematyki w Polsce ukazały się dopiero pod koniec lat osiemdziesiątych i w latach dziewięćdziesiątych ubiegłego stulecia.

Na koniec zasygnalizuję spustoszenia w polskiej dydaktyce i metodyce matematycznego kształcenia dzieci spowodowane wdrażaniem przez ćwierć wieku idei *nowej matematyki*. Skutki te odczuwany do dnia dzisiejszego, chociaż po części są zakryte zaleceniami z latach dziewięćdziesiątych odnośnie wdrażania idei zintegrowanego kształcenia.

Mam też nadzieję przekonać słuchaczy do rozpatrywania edukacji matematycznej na tle historii pedagogiki. Przyjęcie dalszej perspektywy pomaga bowiem lepiej oddzielać ziarna od plew w ustalaniu przyczyn niezadawalającego kształcenia matematycznego i podejmowania działań naprawczych.

Katarzyna HALIK

Uniwersytet Rzeszowski (Rzeszów)

Twierdzenia o zbiorach generowanych w d-σ-posetach

Definiujemy pojęcia d-posetu i d-σ-posetu będące uogólnieniami odpowiednio D-posetu i D-σ-posetu, pojęć wprowadzonych przez F. Kôpkę i F. Chovanca. Dowodzimy kilku twierdzeń o zbiorach generowanych różnych typów w d-σ-posetach. Twierdzenia te mają zastosowanie w teorii miary, teorii całki i teorii prawdopodobieństwa na kratach.

Prezentowane wyniki powstały we współpracy z A. Dadej i A. Kamińskim.

Literatura

[1] F. Chovanec, F. Kôpka, *D-Lattices*, Internat. J. Theoret. Phys. **34** (1995), no. 8, 1297–1302.
[2] F. Chovanec, F. Kôpka, *D-Lattices*, in K. Engesser, D. M. Gabbay, and D. Lehmann (eds.), Handbook of Quantum Logic and Quantum Structures: Quantum Structures, Elsevier B. V., 2007, 367-428.
[3] A. Dvurečenskij, S. Pulmanová, *Tensor products of D-posets and D-test spaces*, Reports of Mathematical Physics **34** (1994), 251-275.
[4] J. Hedlíková, S. Pulmannová, *Generalized difference posets and orthoalgebras*, Acta Math. Univ. Comenianae **45** (1996), 247-279.
[5] A. Kamiński, *On the Rényi theory of conditional probabilities*, Studia Math. **79** (1984), 151-191.
[6] A. Kamiński, *Generated σ-rings and σ-algebras*, Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences, Preprint 385, Waraszawa 1987, 1-36.

Monika HOMA

Uniwersytet Rzeszowski (Rzeszów)

Rekonstrukcja singularnych drzew kwantowych przy użyciu danych spektralnych

Rozważamy teorię spektralnych zagadnień odwrotnych dla singularnych drzew kwantowych, tzn. operatorów różniczkowych o potencjałach singularnych działających na drzewach metrycznych.

W szczególności zbadamy zagadnienie odwrotne polegające na rekonstrukcji singularnego operatora Sturma–Liouville'a określonego na gwiazdkowym grafie metrycznym przy użyciu informacji o $n+1$ widmach. Następnie przeanalizujemy sytuację, gdy potencjał jest znany na jednej lub kilku krawędziach grafu gwiazdkowego i spróbujemy odpowiedzieć na pytanie, czy taka liczba danych wystarcza do przeprowadzenia rekonstrukcji potencjału na całym grafie.

Literatura

[1] M. Homa, R. Hryniv, *Inverse problems for singular quantum trees* (submitted).

Rostyslav Hryniv

Uniwersytet Rzeszowski (Rzeszów)

Rekonstrukcja równania Sturma–Liouville'a z potencjałem zależnym od energii

W klasycznej pracy [1] G. Borg udowodnił, że wartości własne λ_n równania Sturma–Liouville'a na przedziale $[0, 1]$

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \qquad y(0) = y(1) = 0,$$

nie pozwalają na jednoznaczną rekonstrukcję potencjału q, jednak zadanie dodatkowo wartości własnych dla warunków $y(0) = y'(1) = 0$ już wyznacza q w sposób jednoznaczny. W referacie omówiona zostanie możliwość jednoznacznej rekonstrukcji potencjałów p oraz q równania Sturma–Liouville'a postaci

$$-y'' + q(x)y + 2\lambda p(x)y = \lambda^2 y$$

za pomocą odpowiednich wartości własnych oraz innych informacji spektralnych [2, 3].

Literatura

[1] G. Borg, *Eine Umkehrung der Sturm–Liouvilleschen Eigenwertaufgabe: Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte*, Acta Math. **78** (1946), 1-96.

[2] R. Hryniv, N. Pronska, *Inverse spectral problem for energy-dependent Sturm–Liouville equations*, Inverse Problems **28** (2012), 085008.

[3] N. Pronska, *Reconstruction of energy-dependent Sturm–Liouville equations from two spectra*, Itegral Equat. Oper. Theory **76** (2013), 403-419.

KATARZYNA IDZIAK

Uniwersytet Jagielloński (Kraków)

Kilka uwag o trudnościach studentów w uczeniu się logiki

Od ponad 20 lat prowadzę zajęcia z zakresu logiki na różnych kierunkach studiów. Można zaobserwować coraz większe trudności w zrozumieniu i w intuicjach studentów w trakcie zajęć z logiki. Coraz większe kłopoty pojawiają się już z najprostszymi rachunkami logicznymi.

W logice zdaniowej nauczamy, że spójniki koniunkcji i alternatywy są ekstensjonalne i są przemienne, co już powoduje pierwsze kłopoty. Na przykład rozważmy zdanie *Przeprowadzono operację i pacjent zmarł.* Stosując przemienność do koniunkcji łączącej dwa zdania proste otrzymujemy: *Pacjent zmarł i przeprowadzono operację* – zdanie niekoniecznie sensowne. W stosowaniu praw de Morgana „na co dzień” na porządku dziennym są popełniane błędy. Często też w mediach wszelakich, w parlamencie. Gdy zaprzecza się koniunkcji, to tłumaczy się jako koniunkcję zaprzeczeń – co jest błędem niedopuszczalnym.

Najtrudniejszym ze spójników zdaniowych jest najmniej intuicyjna implikacja, którą w mowie potocznej często wyrażamy najpierw wypowiadając następnik, a potem poprzednik.

Duże kłopoty pojawiają się z klasycznym rachunkiem predykatów - też ze stosowaniem praw de Morgana do kwantyfikatorów. Rozszyfrowanie poprawnie zdania z języka naturalnego często bywa dla studentów bardzo trudne.

Po wielu latach edukacji i maturze studenci nie mają wielkiej dyscypliny i konsekwencji w stosowaniu zapisu symbolicznego.

JAN JAKÓBOWSKI

Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie (Olsztyn)

Pomiędzy geometrią i algebrą. Wariacje o płaszczyznach rzutowych małych rzędów

Niech $\mathbf{P}$ bedzie zbiorem elementów zwanych punktami, a $\mathbf{L} \subset 2^{\mathbf{P}}$ rodziną podzbiorów zwanych prostymi. Płaszczyznę rzutową można definiować najbardziej ogólnie jako strukturę incydencyjną $(\mathbf{P}, \mathbf{L}, \in)$ spełniającą 3 aksjomaty. W przypadku skończonym można podać równoważną definicję kombinatoryczną.

Definicja. Płaszczyzna rzutowa jest rzędu n, gdy każda prosta zawiera dokładnie $n+1$ punktów.

Uwaga.

(1) Dla każdej płaszczyzny rzutowej można skonstruować strukturę algebraiczną z dwoma działaniami i odwrotnie: dla odpowiedniej struktury algebraicznej konstruuje się płaszczyznę rzutową nad tą strukturą.
(2) Usuwając z płaszczyzny rzutowej jedną prostą, otrzymujemy nową strukturę incydencyjną zwaną płaszczyzną afiniczną.
(3) Wszystkie płaszczyzny rzutowe do rzędu 8 włącznie są izomorficzne z płaszczyznami konstruowanymi nad ciałem.

Znane są dokładnie 4 nieizomorficzne płaszczyzny rzutowe rzędu 9: nad ciałem $GF(3^2)$; nad prawie-ciałem 9-elementowym (tzw. płaszczyzna translacyjna); płaszczyzna dualna do translacyjnej; płaszczyzna Hughes'a (do konstrukcji również wykorzystuje się prawie-ciało oraz tzw. macierz Singera). W referacie przedstawię najważniejsze własności tych płaszczyzn, ich grupy kolineacji (automorfizmów). W płaszczyźnie rzutowej nad ciałem każda prosta indukuje tę samą (z dokładnoscią do izomorfizmu) płaszczyznę afiniczną. W pozostałych przypadkach istnieją po 2 nieizomorficzne płaszczyzny afiniczne. Wynika stąd, że istnieje dokładnie 7 płaszczyzn afinicznych rzędu 9.

Twierdzenie (Bruck-Ryser). *Jeżeli n daje resztę 1 lub 2 przy dzieleniu przez 4, to n nie może być rzędem płaszczyzny rzutowej, chyba że daje się przedstawić w postaci sumy dwóch kwadratów całkowitych.*

Z twierdzenia Brucka-Rysera wynika, że nie istnieją np. płaszczyzny rzutowe rzędu 6, 14, 21, 22, 30, 33. Wśród liczb dających resztę 1 lub 2 przy dzieleniu przez 4 nie wiadomo czy istnieją płaszczyzny rzędu np. $18 = 3^2 + 3^2$, $26 = 1^2 + 5^2$, $45 = 3^2 + 6^2$.

Twierdzenie. *Płaszczyzna rzutowa rzędu 10 nie istnieje.*

Uwaga. Na płaszczyźnie Hughes'a rzędu 9 dla każdej pary punktów istnieje konfiguracja Fano (tzn. podpłaszczyzna rzutowa rzędu 2) ją zawierająca.

Twierdzenie. *Płaszczyzna rzutowa nad ciałem zawiera konfigurację Havlicka-Tietzego wedy i tylko wtedy, gdy w ciele tym wielomian $x^2 + x + 1$ posiada pierwiastek różny od 1.*

Wniosek. *Konfiguracja H-T istnieje na płaszczyznach rzutowych nad ciałami $GF(7)$, $GF(13)$, $GF(31)$, $GF(73)$, $GF(157)$,.. i nad każdym ciałem $GF(p^2)$.*

Literatura

[1] R. H. Bruck, H. J. Ryser, *The non-existence of certain finite planes*, Can. J. Math. **1** (1949), 88-93.
[2] P. Dembowski, *Finite Geometries*, Springer-Verlag, Berlin, 1968.
[3] D. R. Hughes, *The class of non-Desarguesian projective planes*, Can. J. Math. **9** (1957), 88-93.
[4] J. Jakóbowski, D. Kacperek, *Havlicek-Tietze configurations in various projective planes*, Demonstratio Math. **47** (2014), 979-988.
[5] J. Jakóbowski, *A connection between Fano configurations and Minkowski planes of odd order*, Geom. Dedicata **29** (1989), 221-226.
[6] C. W. H. Lam, L. H. Thiel, S. Swiercz, *The non-existence of finite projective planes of order 10*, Can. J. Math. **41** (1989), 1117-1123.

Marek JANASZ

Uniwersytet Pedagogiczny im. Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie (Kraków)

Aspekty automatycznych dowodów twierdzeń geometrii elementarnej

W referacie zostaną zaprezentowane automatyczne dowody twierdzeń geometrii elementarnej, m.in. twierdzeń księgi VI „Elementów" Euklidesa oraz „Geometrii" Kartezjusza nad ciałem nieuporządkowanym. Na podstawie przykładów rozumowań zostanie omówiona struktura dowodów automatycznych z wykorzystaniem środowiska WinGCLC. Przedstawione zostaną również ograniczenia w zastosowaniu tego narzędzia do automatycznego dowodzenia twierdzeń geometrycznych, wynikające z różnicy między implementacją a teoretycznym opisem metody pola.

Literatura

[1] P. Błaszczyk, K. Mrówka, *Euklides Elementy. Ksiegi V-VI teoria proporcji i podobieństwa, tłumaczenie i komentarz*, Copernicus Center Press, Kraków, 2013.
[2] P. Błaszczyk, K. Mrówka, *Kartezjusz. Geometria*, Universitas, Kraków, 2015.
[3] S. C. Chou, X. S. Gao, J. Z. Zhang, *Machine Proofs in Geometry*, World Scientific, Singapore, 1994.
[4] Euclid, Elements, edited, and provided with a modern English translation, by R. Fitzpatrick; http://farside.ph.utexas.edu/Books/Euclid/Elements.pdf.

[5] D. Hilbert, *The Foundations of Geometry*, Preprint Edition, Illinois, 1950.
[6] P. Janičić, J. Narboux, P. Quaresma, *The area method*, J. Automated Reasoning **48** (2012), no. 4, 489-532.
[7] P. Janičić, P. Quaresma, *Framework for Constructive Geometry*, Centre for Informatics and Systems of the University of Coimbra, 2006.

Maciej JASIŃSKI

Instytut Historii Nauki im. L. i A. Birkenmajerów PAN (Warszawa)

Astronomiczne dane obserwacyjne w „*Theatrum cometicum*" Stanisława Lubienieckiego

W referacie zostaną omówione zagadnienia matematyczne, które poruszył Stanisław Lubieniecki (1623–1675) w swojej książce *Theatrum cometicum* (Amstelodami 1666–1668). Są to przede wszystkim dane dotyczące obserwacji astronomicznych, głównie komet z lat 1664 i 1665, które zebrał od swoich korespondentów. Uważna lektura książki pokazuje, że Lubieniecki nie miał dostatecznego przygotowania astronomicznego, a jego zainteresowania ciałami niebieskimi były jedynie amatorskie. Przyznaje się sam także – wprawdzie rzadko i z widoczną niechęcią – iż podczas nauki w szkołach Braci Polskich w Rakowie i Kisielinie nie zdobył dostatecznej wiedzy matematycznej i astronomicznej. W referacie przedstawię, jak usiłował wykorzystać w *Theatrum cometicum* zdobyte od różnych uczonych dane i informacje oraz omówię jego dążenia do ich usystematyzowania. Podejmę też próbę stwierdzenia, czy jego wiedza astronomiczna była wystarczająca dla samodzielnego zrozumienia przedstawianych danych i jaka była ich funkcja w całości książki.

Literatura

[1] S. Lubieniecki, *Theatrum cometicum*, t. 1-3, Amstelodami, apud Franciscum Cuyperum, 1666-1668.
[2] J. Tazbir, *Stanisław Lubieniecki. Przywódca ariańskiej emigracji*, Warszawa, PWN, 1961.
[3] J. Tazbir, *Stando lubentius moriar. Biografia Stanisława Lubienieckiego*, Warszawa, ISKRY, 2003.

Petro KALENYUK, Yaroslav BARANETSKIJ
Lubov KOLYASA

Lviv Polytechnic National University (Lviv, Ukraine)

A nonlocal problem for a differential operator of even order with involution

The first a research of properties of the operator of an involution began in C. Babbage's paper in 1816. Recently, the number of papers which are devoted to the use of equations with an involution in different sections of the theory of differential equations, integral equations, mathematical physics, the theory of self-similar functions, the theory of PT-symmetric operators has considerable increased.

In this paper, the spectral properties of the operator of the boundary-value problem for the differential equation of the even order with the involution are studied. The presence of an infinite number of associated functions in the system of root functions of this operator is a singularity of the operator of the boundary problem. Such operators are called essentially non-self-adjoint. They were investigated for the first time in V. A. Il'in's paper [1].

Let $I : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ be the operator of involution, $Iy(x) \equiv y(1-x)$, $W_2^{2n}(0,1) \equiv \left\{ y \in L_2(0,1) : y^{(m)} \in AC[0,1],\ y^{(2n)} \in L_2(0,1),\ m = 1,2,\ldots,2n-1 \right\}$.

Consider the following problem

$$\begin{gathered} Ly \equiv (-1)^n y^{(2n)}(x) + \sum_{j=1}^{n} a_j (E-I) y^{(2j-1)}(x) = f(x), \\ x \in (0,1), \quad a_j \in \mathbf{R}, \quad j = 1,2,\ldots,n, \end{gathered} \tag{1}$$

$$l_p y \equiv y^{(2p-1)}(0) - y^{(2p-1)}(1) = 0, \quad p = 1,2,\ldots,n, \tag{2}$$

$$l_{n+p} y \equiv y^{(2p-2)}(0) - y^{(2p-2)}(1) + \sum_{q=1}^{k_p} b_{p,q} \left(y^{(2q-2)}(0) + y^{(2q-2)}(1) \right) = 0, \tag{3}$$

$b_{p,q} \in \mathbf{R}$, $q = 0,1,\ldots,k_p \leqslant n$, $p = 1,2,\ldots,n$.

Let A be the operator of problem (1)-(3),

$$Ay \equiv Ly, \quad y \in D(A), \quad D(A) \equiv \left\{ y \in W_2^{2n}(0,1) : l_p y = 0,\ p = 1,2,\ldots,2n \right\}.$$

The system of root functions of operator A are constructed. The eigenvalues and sufficient conditions under which these system is complete in space $L_2(0,1)$ and form a Riesz basis are established.

References

[1] V. A. Il'in, L. V. Kritskov, *Properties of spectral expansions corresponding to nonselfadjoint differential operators*, J. Math. Sci. (NY) **116** (2003), no. 5, 3489-3550.

Petro KALENYUK[1,2], Zinovii NYTREBYCH[2]
Mykhaylo SYMOTYUK[3]

[1] *University of Rzeszów* (Rzeszów, Poland)
[2] *National University «Lviv Polytechnic»* (Lviv, Ukraine)
[3] *Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NASU* (Ukraine)

Integral problem for an equation with Gelfond-Leontiev generalized differentiation

Gelfand-Shilov space S_α^α ($\alpha \in (1/2,1)$) consists [1] of all functions $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R})$ that admit analytic continuation into the complex plane to an entire function $\varphi(x+iy)$, satisfying

$$\exists\, a,b,c > 0\ \forall z = x+iy \in \mathbf{C} \quad |\varphi(z)| \leqslant c \exp\left(-a|x|^{1/\alpha} + b|y|^{1/\alpha} \right).$$

Let $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$, $z \in \mathbf{C}$, be an entire function with all positive coefficients $f_k > 0$, $k \geqslant 0$, and for fixed $m \in \mathbf{N}$,

$$\exists\, c > 0\ \exists\, L > 1\ \forall k \geqslant m \quad \left| \frac{f_{k-m}}{f_k} \right| \leqslant cL^k.$$

For a function $\varphi \in S_\alpha^\alpha$, $\varphi(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varphi_k x^k$, the operation

$$D_{f(x)}^m \varphi(x) = \sum_{k=m}^{\infty} \varphi_k \frac{f_{k-m}}{f_k} x^{k-m},$$

is said to be a Gelfond-Leontiev generalized differentiation of φ with respect to the function f [2]. The generalized differentiation operator $D_{f(x)}^m$ is well-defined on S_α^α, $\alpha \in (1/2, 1)$, for arbitrary fixed $m \in \mathbf{N}$ and continuously maps this space into itself [3].

We established the conditions of correctness in the spaces S_α^α, $\alpha \in (1/2, 1)$, of the next integral problem

$$\partial_t u(t,x) = D_{f(x)}^m u(t,x), \quad \int_0^T \mathrm{e}^{-at} u(t,x) \mathrm{d}t = \varphi(x), \quad a, T > 0.$$

Obtained results continue the research of the work [4] in the case of the integral problem.

References

[1] I. M. Gelfand, G. E. Shilov, *Generalized Functions, II, III*, Academic Press, New York-London, 1967.

[2] A. O. Gelfond, A. F. Leontiev, *On a generalization of the Fourier series*, Mat. Sbornik **29 (71)** (1951), 477-500 (in Russian).

[3] V. V. Gorodetsky, O. V. Martynyuk, *Gelfond-Leontiev generalized differentiation operators in spaces of type S*, Sib. Math. J. **54** (2013), no. 3, 446-458.

[4] P. I. Kalenyuk, Z. M. Nytrebych, *Generalized scheme of separation of variables. Differential-symbol method*, Publishing House of Lviv Polytechnic National University, Lviv, 2002 (in Ukrainian).

Karolina KARPIŃSKA

Instytut Historii Nauki im. L. i A. Birkenmajerów PAN (Warszawa)

Zmiany zakresów nauczania matematyki w gimnazjach w Toruniu, Gdańsku, Kołobrzegu, Inowrocławiu, Chełmnie i Braniewie od XVI do początku XX wieku

W trakcie referatu zostaną omówione zmiany w programach nauczania matematyki w wybranych szkołach średnich od XVI do początku XX wieku. Szczególna uwaga zostanie zwrócona m.in. na gimnazja w Toruniu, Gdańsku, Kołobrzegu, Inowrocławiu, Chełmnie i Braniewie. W 1788 roku wprowadzono egzaminy maturalne w Prusach, które spowodowały ujednolicenie programów nauczania, również w szkołach znajdujących się za ziemiach polskich pod zaborem pruskim. Oznacza to, że w wymienionych gimnazjach w XIX wieku realizowano podobny materiał. W trakcie referatu w sposób szczególny omówione zostaną m.in. następujące zagadnienia: liczby zespolone, rachunki obywatelskie (obliczenia emerytur itp.), zadania z miernictwa, geometria wykreślna, ciągi arytmetyczne drugiego rzędu, rozwiązywanie trójkątów.

Literatura

[1] P. Schwartz, *Die Gelehrtenschulen Preussens unter dem Oberschulkollegium (1787-1806) Und das Abiturientenexamen*, t. 1, Berlin, 1910, 1666-1668.

[2] *Jahresbericht über das Königl. katholische Gymnasium zu Culm*, Culm, 1855, Danzig, 1890–1892, 1894, 1896, 1899, 1900-1910.

[3] *Programm des Königl. kathol. Gymnasiums zu Culm*, Culm, 1857, 1859, 1861-1863, 1865, 1867, 1869, 1870, 1872-1874, 1876, 1878, 1887.

[4] *Bericht über das Königliche Gymnasium zu Braunsberg*, Braunsberg, 1882.

[5] *Königl. Domgymnasium und Königl. Realgymnasium zu Kolberg*, Kolberg, 1885-1913.
[6] *Gymnasium zu Thorn*, Thorn, 1825-1911.
[7] *Egzaminy maturalne uczniów Gimnazjum w Inowrocławiu z lat 1868-1870, 1873- 1878, 1882-1885, 1887, 1889, 1890, 1900*, materiały dostępne w Bibliotece I Liceum Ogólnokształcącego im. J. Kasprowicza w Inowrocławiu.
[8] K. Podlaszewska, S. Salmonowicz, Z. Zdrójkowski, *Krótka historia Gimnazjum Toruńskiego 1568-1920*, Toruń, 1968.

Lubov KOLYASA, Anatolij MOKHON'KO

Lviv Polytechnic National University (Lviv, Ukraine)

Calculation of coefficients of the equation which determines a derivative of an algebroid function

Consider the following equation

$$u^{\nu} + A_{\nu-1}(z)\, u^{\nu-1} + \ldots + A_0(z) = 0, \tag{1}$$

where $A_j(z),\ z \in \mathbf{C},\ j = 0, 1, \ldots, \nu - 1$, are meromorphic functions. If $\nu = 1$, then the equation (1) determines a meromorphic function. Let us remind the solution $u = u(z)$ of the equation (1) is called the ν-valued algebroid function. The isolated poles and algebraic points of branching are the singular points of the function u. The derivative u' of the function u is an algebroid function which is determined by the equation

$$u'^{\nu} + D_{\nu-1}(z)\, u'^{\nu-1} + \ldots + D_0(z) = 0, \tag{2}$$

where $D_j = D_j(z),\ z \in \mathbf{C},\ j = 0, 1, \ldots, \nu - 1$, are some meromorphic functions.

In an explicit form, we found the coefficients $D_j,\ j = 0, 1, \ldots, \nu - 1$, of the equation for the derivative u' in terms of the meromorphic functions $A_0, \ldots, A_{\nu-1}$ and their derivatives in the cases when $\nu = 3, 4, 5, \ldots$ The case when $\nu = 2$ was considered in the paper [1].

Such representation allows us to reduce the comparison of the rate of increase of the algebroid functions u and u' to comparison of the increase of the meromorphic coefficients A_j and D_j, $j = 0, 1, \ldots, \nu - 1$. Thus, we avoid consideration of points of branching of algebroid functions.

References

[1] K. Katajamäki, *Hayman-Miles theorem and 2-valued algebroid functions*, Results Math. **29** (1996), no. 3-4, 249-253.

Jan KOROŃSKI

Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki (Kraków)

Osiągnięcia z teorii równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych w publikacjach matematyków polskich do I wojny światowej

Na początku XIX wieku w Paryżu działał Józef Hoene-Wroński (1776-1853) urodzony w Wolsztynie. Dorobek matematyczny i filozoficzny Wrońskiego jest ogromny i wciąż wymaga jeszcze opracowania. Jego nazwisko weszło na trwałe do matematyki światowej przy okazji układów równań różniczkowych liniowych. W drugiej połowie XIX wieku wśród matematyków polskich, którzy opublikowali prace naukowe z teorii równań różniczkowych byli [1]: Franciszek Karol

Mertens (1840-1927), Stanisław Kępiński (1867-1908), Kazimierz Stefan Paulin Żorawski (1866-1953), Józef Puzyna (1856-1919), Władysław Folkierski (1841-1904), Alojzy Jan Stodółkiewicz (1856-1934), Jan Rajewski (1857-1906), Wawrzyniec Żmurko (1824-1889), Edward Władysław Skiba (1843-1911), Jan Ptaszycki (1854-1912), Władysław Wojciech Zajączkowski (1837-1898) i oczywiście Stanisław Zaremba (1863-1942). Większa część działalności naukowej Zaremby i Żorawskiego przypada na wiek XX. Osiągnięcia z teorii równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych zamieszczane w publikacjach matematyków polskich do pierwszej wojny światowej dźwigały matematykę polską w mrocznym dla nauki polskiej okresie zaborów. Dzięki m. in. publikacjom Władysława Zajączkowskiego, Stanisława Kępińskiego, Kazimierza Żorawskiego i Stanisława Zaremby przynajmniej w dziedzinie równań różniczkowych matematyka polska na przełomie XIX i XX wieku osiągnęła poziom światowy i to wiele lat przed powstaniem warszawskiej, czy też lwowskiej szkoły matematycznej. Badania naukowe matematyków polskich w dziedzinie równań różniczkowych należały do frontalnych zagadnień badawczych czołowych światowych ośrodków naukowych, a osiągane przez niektórych matematyków polskich rezultaty naukowe niejednokrotnie na trwałe weszły do kanonów literatury z zakresu równań różniczkowych. W konsekwencji na solidnych fundamentach przygotowanych przez Stanisława Zarembę i jego poprzedników w Krakowie w UJ powstała (po II wojnie światowej z pewnymi odniesieniami do lat trzydziestych XX wieku) krakowska szkoła równań różniczkowych, której głównym założycielem był Tadeusz Ważewski (1896-1972), a jego najwybitniejszym kontynuatorem był Jacek Szarski (1921-1980). Niezależnie Mirosław Krzyżański (1907-1965) po II wojnie światowej założył w Politechnice Krakowskiej szkołę równań różniczkowych cząstkowych, której kontynuatorem potem był głównie Feliks Barański (1915-2006), z którym współpracował Jan Musiałek (1920-1996) z AGH.

Literatura

[1] J. Koroński, *Równania różniczkowe zwyczajne i cząstkowe w publikacjach matematyków polskich do I wojny światowej na tle rozwoju teorii równań różniczkowych w świecie*, Monografie Politechniki Krakowskiej, seria: Nauki Podstawowe Matematyka, Wydawnictwo PK, Kraków, 2017, s. 225.

Anna KRÓL

University of Rzeszów (Rzeszów)

Some types of fuzzy equivalences

The presentation deals with notions of fuzzy equivalences which can be defined in many possible way.

One can be defined on the pattern of the following law of classical propositional calculus

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)].$$

The definition involves a fuzzy conjunction C and a fuzzy implication I, this is why the fuzzy equivalence is called (C, I)-equivalence for short, as in the following definition.

Definition. Let C, I be a fuzzy conjunction and implication, respectively. The function $E : [0,1]^2 \to [0,1]$ given by the formula

$$E_{C,I}(x,y) = C(I(x,y), I(y,x)), \quad x, y \in [0,1],$$

is called (C, I)-equivalence.

The other definition can be found in [1].

Definition. A fuzzy equivalence is a function $E : [0,1]^2 \to [0,1]$ which fulfils

$$E(0,1) = 0,$$
$$E(x,x) = 1, \quad x \in [0,1],$$
$$E(x,y) = E(y,x), \quad x,y \in [0,1],$$
$$E(x,y) \leqslant E(u,v), \quad x \leqslant u \leqslant v \leqslant y, \; x,y,u,v \in [0,1].$$

In particular, the properties of such defined fuzzy equivalences are considered. Moreover some dependencies between fuzzy equivalences defined in such a way are considered.

References

[1] J. C. Fodor, M. Roubens, *Fuzzy preference modelling and multicriteria decision support*, Kluwer, Dordrecht, 1994.

Jacek KUCAB

Uniwersytet Rzeszowski (Rzeszów)

Podpotęgowa struktura gruba i jej związki z uzwarceniami przestrzeni metrycznych

Z uzwarceniami przestrzeni topologicznej X związane są ([1]), pewne struktury podzbiorów kwadratu tejże przestrzeni, czy mówiąc inaczej pewne klasy relacji w X. W związku z tak zwanym podpotęgowym uzwarceniem Higsona ([3]) - kompaktyfikacją przestrzeni metrycznej właściwej (X,ρ), opartej na pierścieniu funkcji rzeczywistych ciągłych i ograniczonych o tej własności, że średnica obrazu kuli znika w nieskończoności nawet wtedy, gdy jej promień jest kontrolowany przez grupę funkcji potęgowych, można wprowadzić tak zwaną podpotęgową strukturę grubą, to jest rodzinę

$$\mathcal{E}_P = \left\{ E \subset X \times X \mid E \text{ jest właściwy }, \forall_{\alpha>0} \lim_{|x|\to\infty} \frac{\sup_{y\in E_x^x}\{\rho(x,y)\}}{|x|^\alpha} = 0 \right\}.$$

Okazuje się, że klasa funkcji stowarzyszonych z tą strukturą, czyli funkcji o tej własności, że dla każdego $\epsilon > 0$ i dowolnego elementu $E \in \mathcal{E}$ istnieje zwarty zbiór $K \subset X$ taki, że dla każdego $(x,y) \in E \setminus (K \times K)$ zachodzi $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ jest dokładnie klasą podpotęgowych funkcji Higsona, co pozwala spojrzeć na teorię wymiaru podpotęgowego ([2]) z innej, równoważnej, a często upraszczającej formalizmy perspektywy. Ponadto istnieje związek struktur powyższego typu z tak zwanymi przekształceniami bi-hölderowskimi (których niezmiennikiem jest wymiar podpotęgowy), mianowicie każde tego typu odwzorowanie jest odwzorowaniem grubym ze względu na struktury podpotęgowe dziedziny i przeciwdziedziny, indukuje zatem ciągłe odwzorowanie podpotęgowych uzwarceń tychże przestrzeni z zachowaniem odwzorowań koron tych uzwarceń.

Literatura

[1] R. Engelking, *Topologia ogólna*, PWN, Warszawa, 2007.
[2] J. Kucab, M. Zarichnyi, *On asymptotic power dimension*, Topology and its Appl. **201** (2016) 124-130.
[3] J. Kucab, M. Zarichnyi, *Subpower Higson corona of a metric space*, Algebra and Discrete Math. **17** (2014), no. 2, 280-287.

Grzegorz KUDUK, Michał SYMOTYUK

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine (Lviv, Ukraine)

Zagadnienie z całkowymi warunkami dla układów równań różniczkowych cząstkowych wysokiego rzędu

W obszarze $\Omega = \{(t,x) \in \mathbf{R}^2 : t \in (0,T), x \in \mathbf{R}\}$ rozpatrzmy następujące zagadnienie:

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)\vec{U}(t,x) \equiv \frac{\partial^n \vec{U}(t,x)}{\partial t^n} + \sum_{j=1}^{n} A_j \frac{\partial^n \vec{U}(t,x)}{\partial t^{n-j}\partial x^j} = \vec{0}, \quad t \in (0,T),\ x \in \mathbf{R}, \tag{1}$$

$$\int\limits_0^T t^{j-1}\vec{U}(t,x)\mathrm{d}t = \vec{\varphi}_j(x), \quad j = 1,\ldots,n,\ x \in \mathbf{R}, \tag{2}$$

gdzie $\vec{U}(t,x) = \mathrm{col}\,(U^1(t,x),\ldots,U^m(t,x))$, $\vec{\varphi}_j(x) = \mathrm{col}\left(\varphi_j^1(x),\ldots,\varphi_j^m(x)\right)$, $j = 1,\ldots,n$, $A_j = |a_{q,r}^j|_{q,r=1}^m$, $j = 1,\ldots,n$, jest macierzą kwadratową wymiaru $m \times m$ z elementami zespolonymi. Zakładamy, że pierwiastki $\lambda_1,\ldots,\lambda_{mn}$ równania $\det|L(\lambda,i)| = 0$ są takie, że

$$\mathrm{Re}\,\lambda_1 < \ldots < \mathrm{Re}\,\lambda_{mn}, \quad \mathrm{Re}\,\lambda_j \neq 0, \quad j = 1,\ldots,mn. \tag{3}$$

Oznaczmy: $\vec{h}_q = \mathrm{col}(h_q^1,\ldots,h_q^m)$ dowolna niezerowa kolumna macierzy dołączona do macierzy $L(\lambda_q,i), q = 1,\ldots,mn$;

$$\Delta(\xi) = \begin{vmatrix} h_1^1 \int_0^T \mathrm{e}^{\lambda_1\xi t}\mathrm{d}t & \ldots & h_{mn}^1 \int_0^T \mathrm{e}^{\lambda_{mn}\xi t}\mathrm{d}t \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ h_1^m \int_0^T \mathrm{e}^{\lambda_1\xi t}\mathrm{d}t & \ldots & h_{mn}^m \int_0^T \mathrm{e}^{\lambda_{mn}\xi t}\mathrm{d}t \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ h_1^1 \int_0^T t^{n-1}\mathrm{e}^{\lambda_1\xi t}\mathrm{d}t & \ldots & h_{mn}^1 \int_0^T t^{n-1}\mathrm{e}^{\lambda_{mn}\xi t}\mathrm{d}t \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ h_m^1 \int_0^T t^{n-1}\mathrm{e}^{\lambda_1\xi t}\mathrm{d}t & \ldots & h_{mn}^m \int_0^T t^{n-1}\mathrm{e}^{\lambda_{mn}\xi t}\mathrm{d}t \end{vmatrix}, \quad \xi \in \mathbf{R}\setminus\{0\}.$$

Niech $\overline{H}_\alpha^m$ będzie przestrzenią funkcji wektorowych $\vec{\varphi}(x) = \mathrm{col}\,(\varphi^1(x),\ldots,\varphi^m(x))$ takich, że $\varphi^j \in H_\alpha$ dla wszystkich $j = 1,\ldots,m$, z normą

$$\|\vec{\varphi}(x);\overline{H}_\alpha^m\| = \max_{1\leqslant j\leqslant m}\|\varphi^j(x);H_\alpha\|,$$

$C^n([0,T],\overline{H}_\alpha^m)$ zaś przestrzenią funkcji wektorowych $\vec{U}(t,x) = \mathrm{col}\,(U^1(t,x),\ldots,U^m(t,x))$ takich, że $U^j \in C^n([0,T],H_\alpha)$ dla każdego $j = 1,\ldots,m$, z normą

$$\|\vec{U};C^n([0,T],\overline{H}_\alpha^m\| = \max_{1\leqslant j\leqslant m}\|U^j;C^n([0,T],H_\alpha)\|.$$

Wykazano następujący rezultat rozwiązalności zagadnienia (1), (2).

Twierdzenie. *Niech zachodzi warunek* (3) *i niech* $\Delta(\xi) \neq 0$ *dla każdego* $\xi \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$. *Jeżeli* $\vec{\varphi}_j \in \overline{H}_{\alpha_1}^m, \alpha_1 \geqslant \alpha_2 + m\left(C_n^2+1\right), \alpha_2 \geqslant 0,\ j = 1,\ldots,n,$ *to w przestrzeni* $C^n([0,T],\overline{H}_{\alpha_2}^m)$ *istnieje jednoznaczne rozwiązanie* $\vec{U}(t,x)$ *zagadnienia* (1), (2), *które jest w sposób ciągły zależne od funkcji* *wektorowych $\vec{\varphi}_j$, $j = 1, \ldots, n$. Rozwiązanie to przedstawia równość*

$$\vec{U}(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} \sum_{j,q=1}^{mn} \frac{\Delta_{j,q}(\xi)}{\Delta(\xi)} \mathrm{e}^{\lambda_q \xi t} \vec{h}_q \psi_j(\xi) \mathrm{d}\xi,$$

gdzie $\Delta_{j,q}(\xi)$, $j, q = 1, \ldots, mn$, $\xi \neq 0$, oznacza algebraiczne dopełnienie elementu stojącego w j tym wierszu i q tej kolumnie wyznacznika $\Delta(\xi)$,

$$\mathrm{col}(\psi_1(\xi), \ldots, \psi_{mn}(\xi)) = \mathrm{col}(\tilde{\varphi}_1^1(\xi), \ldots, \tilde{\varphi}_1^m(\xi); \ldots; \tilde{\varphi}_n^1(\xi), \ldots, \tilde{\varphi}_n^m(\xi)),$$

i $\tilde{\varphi}_j^q(\xi)$ jest transformatą Fouriera funkcji $\varphi_j^q(x)$, $j = 1, \ldots, n$, $q = 1, \ldots, m$, odpowiednio.

Literatura

[1] P. I. Kalenyuk, Z. M. Nytrebych. G. Kuduk, M. M. Symotyuk, *Integral problem for partial differential equation of second order in unbounded layer*, Bukovinian Math. J. **4** (2016), no 3-4, 69-74; Chernivtsi: Chernivtsi Nat. Univ. (in Ukrainian).

[2] P. I. Kalenyuk, Z. M. Nytrebych. G. Kuduk, M. M. Symotyuk, *Integral problem for partial differential equation of higher order in unbounded layer*, Math. Methods and Phys.-Mech. Polia. **59** (2016), no. 2, 19-28 (in Ukrainian).

[3] P. I. Kalenyuk, Z. M. Nytrebych. G. Kuduk, M. M. Symotyuk, *Problem with integral conditions for system of partial differential equations of second order*, Proc. of 13 Open Sci. Conf. of Institute of Applied Mathematics and Fundamental Sciences of Lviv Polytechnic National University, dedicated to 125th anniversary of S. Banach, 30-31 March 2017, pp. 42-43 (in Ukrainian).

Piotr LASEK

Uniwersytet Rzeszowski (Rzeszów)

Obliczenia granularne w grupowaniu danych na przykładzie algorytmu k-średnich

Kluczowym elementem każdego algorytmu grupowania jest wyznaczanie podobieństwa (czy inaczej - odległości) pomiędzy grupowanymi obiektami. W gęstościowych algorytmach grupujących wyznacza się również tzw. otoczenie, ale i ten proces oparty jest w dużej mierze na wyznaczaniu odległości. Aby proces ten uczynić efektywnym, korzysta się z różnego rodzaju indeksów. Jednym z najbardziej rozpowszechnionych, ale jednocześnie niezwykle prostych algorytmów, jest algorytm podziału, zwany algorytmem k-średnich [1]. Zasada działania tego algorytmu zamyka się w następujących krokach:

(1) Ustalenie liczby grup (k);
(2) Ustalenie wstępnych środków grup;
(3) Obliczenie odległości obiektów od środków grup;
(4) Przypisanie obiektów do grup na zasadzie porównania odległości do wszystkich środków grup i przypisania obiektów do grupy reprezentowanej przez środek położony najbliżej aktualnie analizowanego obiektu;
(5) Ustalenie nowe środków grup;
(6) Powtórzenie kroków (3),(4),(5) do czasu, aż wybrany warunek zatrzymania zostanie spełniony.

W trakcie referatu zostanie zaprezentowana, metoda modyfikacji algorytmu k-średnich polegająca na:

(1) Zastosowaniu hierarchicznej struktury danych (pi-cube) [2, 3], która reprezentuje zbiór danych w postaci wielowymiarowej kostki (zbliżonej do kostki OLAP) zbudowanej z komórek, która reprezentuje dane na różnych poziomach granularności;
(2) Zmodyfikowaniu oryginalnego algorytmu k-średnich w taki sposób, aby nie było konieczne sprawdzanie odległości obiektów do środków grup, ale aby dzięki zastosowaniu w.w. struktury można było przypisawać do danej grupy (pod pewnymi warunkami) wszystkie obiekty, które znajdujące się w komórce struktury pi-cube.

Literatura

[1] J. B. MacQueen, *Some Methods for classification and Analysis of Multivariate Observations*, Proceedings of 5th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. 1. University of California Press, 1967, 281-297; MR 0214227, Zbl 0214.46201, Retrieved 2009-04-07.
[2] P. Godfrey, J. Gryz, P. Lasek, N. Razavi, *Interactive Visualization of Big Data*, In: S. Kozielski, D. Mrozek, P. Kasprowski, B. Małysiak-Mrozek, D. Kostrzewa (eds), Beyond Databases, Architectures and Structures. Advanced Technologies for Data Mining and Knowledge Discovery, BDAS 2015, BDAS 2016, Communications in Computer and Information Science, vol. **613**, 2016, Springer, Cham.
[3] P. Godfrey, J. Gryz, P. Lasek, *Interactive Visualization of Large Data Sets*, IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, **28** (2016), 1-1; 10.1109/TKDE.2016.2557324.

Adam LECKO, Barbara ŚMIAROWSKA

University of Warmia and Mazury in Olsztyn (Olsztyn)

Julia-Carathéodory Theorem for functions with fixed initial coefficients

The Julia-Carathéodory Theorem [1] (e.g., [4, p. 82]) states that every analytic self-mapping of the the unit disk $\mathbf{D} := \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ having the angular limit 1 at 1 has the angular derivative at 1 which is either a positive real number or infinity. We present a generalization of the so-called General Boundary Lemma due to Osserman [3, p. 3515] giving sharp lower bound of the angular derivative of self-mappings of $\mathbf{D}$ depending on their initial coefficients [2]. Examples of analytic self-mappings of $\mathbf{D}$ complete the result.

References

[1] G. Julia, *Extension nouvelle d'un lemme de Schwarz*, Acta Math. **42** (1918), 349-355.
[2] A. Lecko, B. Uzar, *A note on Julia-Caratheodory Theorem for functions with fixed initial coefficients*, Proc. Japan Acad. **89** (2013), Ser. A, no. 10, 133-137.
[3] R. Osserman, *A sharp Schwarz inequality on the boundary*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), no. 12, 3513-3517.
[4] C. Pommerenke, *Boundary Behaviour of Conformal Maps*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1992.

Violetta LIPIŃSKA

Politechnika Łódzka (Łódź)

Kalkulacja składek w ubezpieczeniach życiowych – projekt

Moim zdaniem, aby pobudzić Studentów do kreatywnego myślenia, trzeba dać im przede wszystkim samodzielne zadanie. Oczywiście nie jest to warunek wystarczający, aby uzyskać zakładany efekt. Niemniej jednak wydaje mi się, że w ten sposób można chociaż częściowo ich uaktywnić.

Takie wnioski wysnułam po kilku semestrach opiekowania się Studentami na przedmiocie *Kalkulacja składek w ubezpieczeniach życiowych – projekt.* Na podstawie moich obserwacji chciałabym zaprezentować kilka problemów z jakimi muszą zmierzyć się Studenci, i które pojawiają się przy tworzeniu projektu z wykorzystaniem danych empirycznych.

Projekt, o którym będę opowiadała dotyczy kalkulatora ubezpieczeniowego tworzonego w trakcie zajęć ze wspomnianego wcześniej przedmiotu.

Zbigniew LIPIŃSKI

Uniwersytet Opolski (Opole)

O rozwiązaniach problemu maksymalizacji czasu życia bezprzewodowych sieci sensorycznych

Bezprzewodowe sieci sensoryczne są przykładem sieci bez infrastruktury. W takich sieciach nie ma dydykowanych urządzeń pełniących rolę routerów i przełączników. Węzły sieci (sensory) oprócz realizowania funkcji aplikacyjnych muszą wyznaczać trasy transmisji pakietów - pełniąc funkcje routerów i retransmitować dane odebrane od innych sensorów - pełniąc rolę przełączników. Sensory są urządzeniami o niewielkich rozmiarach posiadające ograniczone zasoby pamięci i mocy obliczeniowej. Ponieważ są zasilne bateriami posiadają również ograniczone zasoby energii. Ograniczoność zasobów i stosowanie komunikacji bezprzewodowej, która pozwala na komunikację 'każdy z każdym' powoduje, że zagadnienia optymalizacji transmisji danych w takich sieciach jest trudniejsze niż np. w sieciach przewodowych z infrastrukturą. Przykładem zagadnienia optymalizacyjnego w sieciach sensorycznych jest zagadnienie maksymalizacji czasu życia sieci. W wyniku realizacji zadań aplikacyjnych zasoby sensorów, w szczególności energie ich baterii wyczerpują się. Czas życia sieci senorycznej definiuje się jako czas po którym pierwszy węzeł sieci wyczerpie swoje zasoby energii i przestanie działać [1, 2, 3, 4, 5].

W referacie zostaną omówione rozwiązania zagadnień maksymalizacji czasu życia sieci sensorycznych dla dwóch typów transmisji danych. Pierwszym typem jest transmisja typu punkt-punkt. Stosowana w zagadnieniach w których sensory przesyłają wygenerowane dane do urządzeń zbierających (kolektorów danych). Drugim typem transmisji jest transmisja broadcastowa, w której wygenerowane dane przez pojedynczy sensor są odbierane przez wszystkie inne sensory w danej sieci. Jeżeli przez Q_i oznaczyć ilość danych generowanych przez i-ty sensor, przez $q_{i,j} \geqslant 0$ ilość danych przesłanych między i-tym i j-tym węzłem sieci (senorem lub kolektorem danych) to wielkość

$$E_i(q) = \sum_{j \neq i} q_{i,j} E_{i,j},$$

jest energią jaką zużywa i-ty sensor w celu wysłania wszystkich swoich danych. W powyższej formule $E_{i,j}$ jest kosztem przesłania jednostki danych między i-tym i j-tym węzłem. W zagadnieniu maksymalizacji czasu życia sieci szukany jest taki układ liczb $q^o_{i,j}$ dla którego funkcja

$$E(q) = \max_i \{E_i(q)\}$$

osiąga swoje minimum, t.j., szukamy $\min_q \max_i \{E_i(q)\}$. W zależności od rodzaju zgdnienia minimum funkcji $E(q)$ szukane jest z dodatkowymi warunkami nałożonym na zmienne $q_{i,j}$. Na przykład, dla transmisji typu punkt-punkt warunek

$$\forall_{i \in S} \sum_{j \in S \cup C} q_{i,j} = Q_i + \sum_{j \in S} q_{j,i}$$

oznacza, że ilość danych wysłanych przez i-ty węzeł musi być równa ilości danych które zostały wygenerowane przez ten węzeł i ilości danych które zostały odebrane od innych węzłów. Warunek ten gwarantuje, że dane nie będą zbierane przez sensory (elementy zbioru S) a tylko przez kolektory danych (elementy zbioru C). Z defnicji węzeł sieci jest kolektorem, jeżeli tylko odbiera dane, t.j., $\forall_{k \in C} q_{k,i} = 0$. Dla transmisji broadcastowej warunek, aby dane Q_k wygenerowane przez k-ty brodacstujący węzeł trafiły do wszystkich innych węzłów ma postać

$$\forall_{j \in [1,N], j \neq k} \sum_{i=1, i \neq j}^{N} q_{i,j}^{k} = Q_k.$$

W referacie zostaną omówione rozwiązania zagadnieniu maksymalizacji czasu życia sieci opublikowane w artykułach [6, 7, 8, 11]. Dodatkowo zostanie omówiona zmodyfikowana formula Shannona-Hartley'a dla pojemności kanałów tranmsyjnych w których węzeł nadawczy dostosowuje moc nadajnika do odległości do odbiorcy danych, [9] i związek symetrii sieci (kształtu sieci) z symetriami rozwiązań zagadnienia maksymalizacji czasu życia sieci, [10].

Literatura

[1] A. Giridhar, P.R. Kumar, *Maximizing the functional lifetime of sensor networks*, In IPSN 05: Proceedings of the 4-th International Symposium on Information Processing in Sensor Networks, Piscataway, NJ, USA, IEEE Press, 2005.

[2] J. H. Chang, L. Tassiulas, *Energy Conserving Routing in Wireless Ad-hoc Networks*, Proceedings INFOCOM, 2000, pp. 22-31.

[3] P. Gupta, P. R. Kumar, *The capacity of wireless networks*, IEEE Trans. Inf. Theor. **46** (2000), no. 2, 388-404.

[4] T. Acharya, G. Paul, *Maximum lifetime broadcast communications in cooperative multihop wireless ad hoc networks: Centralized and distributed approaches*, Ad Hoc Networks **11** (2013), 1667-1682.

[5] I. Kang, R. Poovendran, Maximizing Network Lifetime of Broadcasting Over Wireless Stationary Ad Hoc Networks, Mobile Networks and Applications 10, pp. 879-896, 2005.

[6] Z. Lipiński, *Stability of routing strategies for the maximum lifetime problem in ad-hoc wireless networks*, Proceedings of the 3rd International Workshop on Signal Processing and Machine Learning, Springer, 12th International Conference on P2P, Parallel, Grid, Cloud and Internet Computing 2017 (3PGCIC-2017), Workshop-SiPML 2017, November 8-10, Barcelona, Spain.

[7] Z. Lipiński, *Maximum lifetime broadcasting problem in sensor networks* (submitted on 17 Nov 2015, http://arxiv.org/abs/1511.05587).

[8] Z. Lipiński, *Minimum node weight spanning trees searching algorithm for broadcast transmission in sensor networks*,
Proceedings of the 12 International Conference on Digital Information Management, IEEE, ICDIM 2017, September 12-14, 2017, Fukuoka, Japan.

[9] Z. Lipiński, *Maximum Lifetime Problem in Sensor Networks with Limited Channel Capacity*, Proceedings of the 8th KES International Conference on Intelligent Decision Technologies (KES-IDT 2016) – Part I, pp.151-163, Springer, 2016.

[10] Z. Lipiński, *On the role of symmetry in solving maximum lifetime problem in two-dimensional sensor networks*, Wireless Networks, 2016; DOI 10.1007/s11276-016-1354-4.

[11] Z. Lipiński, *Extending the lifetime of gossipping symmetric sensor networks* (to be published in 2017).

Ołeh ŁOPUSZAŃSKI

Uniwersytet Rzeszowski (Rzeszów)

On Paley-Wiener theorem on infinite-dimensional unitary groups

This research deals with the Hardy space H^2_χ of square-integrable $\mathbf{C}$-valued functions with respect to an invariant probability measure χ over the ∞-dimensional group

$$U(\infty) = \bigcup\{U(m)\colon m \in \mathbf{N}\}$$

which irreducibly acts on a complex Hilbert space E with an orthonormal basis $\{e_m\}$, where $U(m)$ is the subgroup of unitary $m \times m$-matrices.

Using a unitarily weighted symmetric Fock space $\mathit{\Gamma}_{\mathrm{w}}$ with a orthogonal basis of symmetric tensor products $\{e_\imath^{\odot\lambda}\}$ of basis elements $\{e_m\}$ indexed by Young diagrams λ and normalized by χ, we find an orthogonal basis of polynomial $\{\phi_\imath^\lambda\}$ in H^2_χ such that the conjugate-linear mapping

$$\mathit{\Phi}\colon \mathit{\Gamma}_{\mathrm{w}} \to H^2_\chi$$

is a surjective isometry with one-to-one correspondence $e_\imath^{\odot\lambda} \rightleftarrows \phi_\imath^\lambda$. This allows us to establish an integral formula for a Fock-symmetric Fourier-transform

$$\mathcal{F}\colon H^2_\chi \ni f \mapsto \widehat{f} \in H^2_{\mathrm{w}}$$

where the Hilbert space H^2_{w}, uniquely determined by $\mathit{\Gamma}_{\mathrm{w}}$, consists of Hilbert-Schmidt analytic entire functions in infinitely many variables on E. Thus, $\mathcal{F}$ acts as an analog of the Paley-Wiener isomorphism over infinite-dimensional groups (see [1] for details).

References

[1] O. Lopushansky, *Paley-Wiener isomorphism over infinite-dimensional unitary groups*, Results Math. 2017; DOI 10.1007/s00025-017-0750-0.

Bożena MAJ-TATSIS, Konstantinos TATSIS

Uniwersytet Rzeszowski (Rzeszów),
Uniwersytet w Ioanninie (Grecja)

Przejawy rozumowania matematycznego u ośmioletnich dzieci podczas rozwiązywania problemów – studium przypadku

W referacie przedstawiono wyniki badań przeprowadzonych wśród dwóch ośmioletnich dziewczynek podczas aktywności rozwiązywania problemów matematycznych. Analiza pracy dzieci i ich wypowiedzi była prowadzona w kierunku zidentyfikowania aspektów matematycznego rozumowania (Lannin, Ellis i Elliot, 2011). Dodatkowo, analiza ujawniła różnice w sposobach pracy obu uczennic – odnośnie przejawów matematycznego rozumowania, jak również pewnych specyficznych cech osobowości, charakteryujących dzieci uzdolnione matematycznie (Brandl, 2011). Wyniki pokazują, że pewne aspekty rozumowania matematycznego są dostępne dla uczniów w tak młodym wieku, jeśli spełnione są określone warunki.

Serhii MASHCHENKO

Taras Shevchenko National University of Kyiv (Kyiv, Ukraine)

A linear programming problem with a fuzzy set of the constraints indices

Using linear programming models

$$cx \to \max; \tag{1}$$

subject to

$$a_i x \leqslant b_i, \quad i \in M = \{1, 2, \dots, m\}; \tag{2}$$

$$x \geqslant 0 \tag{3}$$

for solving real decision problems, we often encounter the difficulty that not all of its parameters are known exactly. In known formulations of fuzzy linear programming problems the fuzziness is manifested in the description of coefficients of both the objective function and the constraints, not concerning the set of constraints indices. In the report, we will analyze a linear programming problem with a fuzzy set of the indices of constraints.

Assume that decision maker cannot clearly specify which constraints from the set M should actually define the feasible alternatives but can only define a membership function $\mu(i)$, $i \in M$, of the fuzzy set of indices $\tilde{M} = \cup_{i \in M}(i, \mu(i))$ of actual (in his opinion) constraints.Then a linear programming problem with a fuzzy set of the indices of constraints occurs in the following formulation:

$$cx \to \max; \tag{4}$$

subject to

$$a_i x \leqslant b_i, \quad (i, \mu(i)) \in \tilde{M}; \tag{5}$$

$$x \geqslant 0. \tag{6}$$

In the basis of offered approach the notion of intersection of crisp sets with fuzzy set of operands [1, 2] lies to the solving of this problem. In the report properties of this set are led and the formulation of the problem of rational decisions choice is considered.

References

[1] S. O. Mashchenko, *A mathematical programming problem with the fuzzy set of indices of constraints*, Cybernetics and Systems Analysis **49** (2013), no. 1, 62-68; DOI: 10.1007/s10559-013-9485-4.

[2] S. O. Mashchenko, *The fuzzy individual optimum equilibriums*, Cybernetics and Computer Engineering **159** (2010), 19-29 (in Russian).

Krzysztof MAŚLANKA

Instytut Historii Nauki Polskiej Akademii Nauk (Warszawa, Kraków)

Globalnie zbieżne rozwinięcia funkcji dzeta Riemanna jako przykład prawa Arnolda-Berry'ego

Funkcja dzeta Riemanna $\zeta(s)$ jest fundamentem analitycznej teorii liczb. Jej najbardziej naturalną definicją jest pewien szereg Dirichleta lub, co pokazał jeszcze Leonhard Euler, pewien iloczyn nieskończony po wszystkich liczbach pierwszych (1737 r.). Niestety, obie te reprezentacje nie są zbieżne w najciekawszym obszarze płaszczyzny zespolonej zwanym pasem krytycznym

$0 < \mathrm{Re}(s) < 1$. W pasie tym leżą tzw. nietrywialne miejsca zerowe funkcji dzeta. (Ich rozkład jest jednym z najtrudniejszych i wciąż nierozstrzygniętych problemów teorii liczb – tzw. hipoteza Riemanna, 1859 r.)

Aby zatem obliczyć wartości funkcji dzeta w pasie krytycznym należy dokonać przedłużenia analitycznego tej funkcji na całą płaszczyznę zespoloną (z wyjątkiem jedynego bieguna tej funkcji dla $s = 1$). Kluczowym zadaniem jest skonstruowanie globalnie zbieżnego rozwinięcia. Dziś znane są dwa takie rozwinięcia. Pierwsze z nich znalazł mało znany matematyk francuski Joseph Ser w roku 1926. Jego trzystronicowa praca zawierała szereg błędów oraz pomyłek i pozostała niezauważona. Niemal identyczne rozwinięcie znalazł niezależnie matematyk niemiecki Helmut Hasse w roku 1930. Po raz trzeci, również niezależnie, znalazł je w roku 1996 Amerykanin Jonathan Sondow [3]. Takie wielokrotne, niezależne odkrycia naukowe są treścią nieformalnego „prawa" Arnolda Berry'ego. Drugie globalnie zbieżne rozwinięcie funkcji dzeta znalazł autor niniejszego referatu w roku 1997 [4, 1]. Z pomocą tego rozwinięcia matematyk z Wenezueli Luis Báez-Duarte sformułował w roku 2003 interesujące kryterium (tj. warunek równoważny) dla sławnej hipotezy Riemanna [2].

Literatura

[1] L. Báez-Duarte, *On Maslanka's Representation for the Riemann Zeta Function*, Int. J. Math. Math. Sci. **2010** (2010), Article ID 714147.

[2] L. Báez-Duarte, *A New Necessary and Sufficient Condition for the Riemann Hypothesis*, arXiv:math/0307215v1 [math.NT] 16 Jul 2003.

[3] I. V. Blagouchine, *Three Notes on Ser's and Hasse's Representations for the Zeta-Functions*, arXiv:1606.02044v3 [math.NT] 24 Oct 2016.

[4] K. Maślanka, *The Beauty of Nothingness: Essay on the Zeta Function of Riemann*, Acta Cosmologica **XXIII**-1 (1998), 13-17.

Andrzej MICHALSKI

Katolicki Uniwersytet Lubelski Jana Pawła II (Lublin)

Warunki konieczne zwartości różnicy operatorów złożenia na przestrzeni Dirichleta

Niech φ będzie odwzorowaniem analitycznym koła jednostkowego płaszczyzny zespolonej w siebie i niech C_φ oznacza operator złożenia z funkcją φ określony na klasycznej przestrzeni Dirichleta $\mathcal{D}$. Dla dowolnych odwzorowań analitycznych φ, ψ koła jednostkowego w siebie podajemy warunki konieczne zwartości różnicy operatorów C_φ i C_ψ.

Prezentowane wyniki uzyskano we współpracy z Małgorzatą Michalską.

Jerzy MONTUSIEWICZ

Politechnika Lubelska, Instytut Informatyki (Lublin)

Zintegrowany system do wspomagania decyzji wielokryterialnych: budowa i zastosowanie

W pracy zaprezentowano zasadę działania, budowę i zastosowanie autorskiego *Zintegrowanego Systemu Oceny Wielokryterialnej* służącego do wspomagania procesu wyboru i podejmowania decyzji przy wektorowych wskaźnikach jakości. Stworzony system obejmuje cztery jakościowo różne metody analizy wielokryterialnej: *Metodę wartości progowej, Zmodyfikowaną metodę punktu referencyjnego, Metodę przedziału nierozróżnialności* oraz *Metodę wyznaczania rozwiązań kompromisowych.* Metody tworzące prezentowany system nie wprowadzają w procesie wspomagania procesu wyboru ani jawnej, ani ukrytej skalaryzacji. Takie podejście nie zniekształca rozwiązywanego problemu, lecz zachowuje go w pierwotnej postaci.

W pracy zdefiniowano optymalności w sensie przedziału nierozróżnialności oraz zbudowano różne algorytmy do sortowania rozwiązań niezdominowanych *Metodą przedziału nierozróżnialności.* Ponadto zdefiniowano dodatkowe punkty charakterystyczne w przestrzeni kryterialnej: lokalne punkty idealne oraz nadążne punkty idealne, które umożliwiły zbudowanie algorytmów do poszukiwania rozwiązań najlepszych przy użyciu *Metody wyznaczania rozwiązań kompromisowych.*

Działania *Zintegrowanego Systemu Oceny Wielokryterialnej* i jego metod składowych zaprezentowano na kilku rzeczywistych przykładach dzięki czemu możliwe stało się rozwiązanie problemów decyzyjnych w obszarze procesów projektowania, eksploatacji i planowania wytwarzania obiektów technicznych. Przedstawione przykłady dotyczyły: oceny wpływu implantacji jonowej na modyfikacje właściwości przeciwzużyciowych gniazd rozpylaczy paliwa, znalezienia kształtu uzwojenia kriomagnesu pełniącego funkcję matrycowego filtra wysokogradientowego separatora cząstek ferromagnetycznych, doboru podsystemu obrabiarek w projektowaniu elastycznego systemu produkcyjnego części klasy korpus.

Przedstawione przykłady zastosowania *Zintegrowanego Systemu Oceny Wielokryterialnej* potwierdziły walory zaproponowanej wieloetapowej koncepcji dochodzenia do rozwiązania preferowanego, poprawność doboru metod wchodzących w skład tego systemu oraz idei wykorzystania informacji zawartych w rozwiązaniach wchodzących w skład analizowanych podzbiorów ocen.

Literatura

[1] J. Montusiewicz, *Wspomaganie procesów projektowania i planowania wytwarzania w budowie i eksploatacji maszyn metodami analizy wielokryterialnej*, wyd. Politechnika Lubelska, Lublin, 2012.

[2] A. Gola, J. Montusiewicz, A. Świć, *Computer aided FMS machine tools subsystem of multicriteria analysis*, Appl. Comp. Sci. **7** (2011), 18-29.

Mikhail MOSHKOV

King Abdullah University of Science and Technology (Thuwal, Saudi Arabia)

Extensions of dynamic programming for investigation of decision trees

We consider extensions of dynamic programming approach to the investigation of decision trees as algorithms for problem solving, as a way for knowledge extraction and representation, and as classifiers which, for a new object given by values of conditional attributes, define a value of the decision attribute. These extensions allow us

(i) to describe the set of optimal decision trees,
(ii) to count the number of these trees,
(iii) to make sequential optimization of decision trees relative to different criteria,
(iv) to find the set of Pareto optimal points for two criteria,
(v) to describe relationships between two criteria.

The results include the minimization of average depth for decision trees sorting eight elements (this question was open since 1968), improvement of upper bounds on the depth of decision trees for diagnosis of 0-1-faults in read-once combinatorial circuits, existence of totally optimal (with minimum depth and minimum number of nodes) decision trees for Boolean functions, study of time-memory trade-off for decision trees for corner point detection, study of relationships between number and maximum length of decision rules derived from decision trees, study of accuracy-size trade-off for decision trees which allows us to construct enough small and accurate decision trees for knowledge representation, and decision trees that, as classifiers, outperform often decision trees constructed by CART.

Some initial results can be found in two books published by Springer [5, 6]. Details are described in various papers (see, for example, [1, 2, 3, 4]).

References

[1] H. AbouEisha, I. Chikalov, M. Moshkov, *Decision trees with minimum average depth for sorting eight elements*, Discrete Appl. Math. **204** (2016), 203-207.

[2] S. Alrawaf, I. Chikalov, S. Hussain, M. Moshkov, *Diagnosis of constant faults in iteration-free circuits over monotone Boolean functions*, Discrete Appl. Math. **166** (2014), 287-291.

[3] M. Busbait, M. Moshkov, *Diagnosis of three types of constant faults in read-once contact networks over finite bases*, Theoretical Comp. Sci. **630** (2016), 26-42.

[4] I. Chikalov, S. Hussain, M. Moshkov, *Totally optimal decision trees for Boolean functions*, Discrete Appl. Math. **215** (2016), 1-13.

[5] I. Chikalov, V. Lozin, I. Lozina, M. Moshkov, H. S. Nguyen, A. Skowron, B. Zielosko, *Three Approaches to Data Analysis: Test Theory, Rough Sets and Logical Analysis of Data*, Intelligent Systems Reference Library, **41**, Springer, 2013.

[6] M. Moshkov, B. Zielosko, *Combinatorial Machine Learning: A Rough Set Approach*, Studies in Computational Intelligence, **360**, Springer, 2011.

Wiesław PAJA

Uniwersytet Rzeszowski (Rzeszów)

Pokolenia drzew i reguł decyzji jako metoda rankingu i selekcji atrybutów istotnych

W dobie nagromadzenia ogromnych ilości danych, różnodziedzinowych baz danych, efektywna ich analiza i wyszukiwanie regularności stały się zadaniem niezmiernie istotnym. Eksploracja danych obarczona jest wieloma aspektami które ją utrudniają takimi jak bardzo duża liczba obserwacji, zbyt duża liczba atrybutów, nieistotność części zmiennych dla klasyfikacji obiektów, wzajemne współzależności zmiennych warunkowych, równoczesna obecność zmiennych różnego typu, występowanie niezdefiniowanych wartości zmiennych, występowanie błędnych wartości zmiennych, nierównomierny rozkład kategorii dla zmiennej celu [1, 2]. Selekcja cech stanowi bardzo znaną dziedzinę analizy danych. W literaturze znanych jest szereg dostępnych metod i algorytmów realizujących to zadanie. Proces selekcji ma na celu ograniczenie przestrzeni cech opisujących problem do zbioru cech mających największy wpływ na cechę decyzyjną (Most Relevant Feature Selection) lub zbiór wszystkich atrybutów które mają wpływ większy niż losowe wartości cech (All Relevant Feature Selection)[3, 4].

Prezentowane badania związane są z opracowaniem nowych algorytmów selekcji istotnych cech opartych na pokoleniach reguł i drzew decyzji. Algorytmy pozwalają wyznaczyć parametry istotności atrybutów w zależności od ich częstotliwości i pozycji występowaniem w modelach regułowych lub w modelach drzew decyzji [5, 6]. Ponadto wprowadzono pojęcie pokoleń reguł lub drzew co pozwala na tzw. doszacowanie istotności dla cech mniej istotnych. W celu odseparowania podzbioru cech istotnych od zbioru cech nieistotnych zastosowano pojęcie zmiennych kontrastowych. W procesie badawczym zastosowano wybrane algorytmy selekcji istotnych cech i miary oceny ich istotności. Badania przeprowadzono na wybranych zbiorach informacyjnych zarówno referencyjnych, związanych z oceną metod selekcji cech, jak i realnych zbiorach danych. Otrzymane wyniki wskazują na wysoką skuteczność opracowanych metod zarówno pod względem obliczeniowym jak i klasyfikacyjnym.

Literatura

[1] R. Kohavi, G. H. John, *Wrappers for feature subset selection*, Artif. Intell. **97** (1997), 273–324.

[2] M. L. Bermingham, R. Pong-Wong, A. Spiliopoulou, C. Hayward, I. Rudan, H. Campbell, A. F. Wright, J. F. Wilson, F. Agakov, P. Navarro, C. S. Haley, *Application of high-dimensional feature selection: evaluation for genomic prediction in man*, Sci. Rep. **5** (2015).

[3] W. R. Rudnicki, M. Wrzesień, W. Paja, *All Relevant Feature Selection Methods and Applications*, In: U. Stańczyk and C. J. Lakhmi (eds.) Feature Selection for Data and Pattern Recognition, pp. 11–28, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, Berlin, 2015.

[4] W. Paja, M. Wrzesień, R. Niemiec, W. R. Rudnicki, *Application of all-relevant feature selection for the failure analysis of parameter-induced simulation crashes in climate models*, Geoscientific Model Development **9** (2016), 1065–1072.

[5] W. Paja, *Feature Selection Methods Based on Decision Rule and Tree Models*, In: I. Czarnowski, A. M. Caballero, R. J. Howlett and C. J. Lakhmi (eds.) Intelligent Decision Technologies 2016, Proceedings of the 8th KES International Conference on Intelligent Decision Technologies (KES-IDT 2016) - Part II, Springer International Publishing, Cham, 63-70, 2016.

[6] W. Paja, *Generational Feature Elimination to Find All Relevant Feature Subset*, In: I. Czarnowski, R. J. Howlett and C. J. Lakhmi (eds.) Intelligent Decision Technologies 2017, Proceedings of the 9th KES International Conference on Intelligent Decision Technologies (KES-IDT 2017) - Part I, Springer International Publishing, Cham, 140-148, 2016.

Antoni PARDAŁA, Madina DZHAMANKARAYEVA

Wyższa Szkoła Handlowa (Radom),
South Kazakhstan State Pedagogical Institute (Shymkent)

Matematyczne kształcenie w integracji z drugimi przedmiotami – przykłady i wyzwania przyszłości

Współczesne fakty i wyniki podejmowanych międzynarodowych, bądź krajowych badań naukowych potwierdzają wzrastające zatroskanie wśród wielu państw świata – także Polski - o doskonalenie jakości kształcenia matematycznego dzieci, uczniów i studentów. Matematyka była i jest nadal niekwestionowanym fenomenem ogólnoświatowej kultury, w której odbija się m. in. historia jej rozwoju i osiągnięć wybitnych jej przedstawicieli, bądź z innych dziedzin wiedzy i twórczości. Niektóre z nich wdrożone są do procesu kształcenia matematycznego, bądź kształcenia ogólnego dzieci, uczniów i studentów. Na przykład, informatyka, programy komputerowe i Internet, innowacyjne i komputerowe technologie (IKT) oraz inne środki techniczne wspomagają tradycyjne metodyki nauczania i uczenia się matematyki. Współczesne wyniki badań z dydaktyki matematyki potwierdzają, że racjonalne wykorzystanie IKT, nowoczesnych środków prezentacji i wizualizacji treści nauczania, platform edukacyjnych i metodyki e-learningu zwiększa skuteczność procesu edukacyjnego oraz nie powinno być zagrożeniem dla tradycyjnych metod matematyczno - przyrodniczego nauczania i uczenia się uczniów, studentów. Ale w przeciwnym przypadku, wyłączne zaufanie do stosowania w/w sposobów i metod zinformatyzowania procesu kształcenia może rodzić ograniczanie lub hamowanie kształcenia ich pamięci i motywacji wewnętrznej do uczenia się matematyki, bądź innych przedmiotów. Podjęta próba opracowania tematu i problematyki tej pracy, podane w niej przykłady, poniższe pytania dotyczą współczesnej praktyki kształcenia matematycznego: 1) Jak „odblokować" i zmotywować tych uczniów i studentów, którzy mają trudności typu „nie umieją myśleć", „nie umieją widzieć" w matematyce; „nie umieją przyswajać" ze zrozumieniem treści programowe z matematyki?; 2) A jak „odblokować" i zmotywować tych, którzy uczą się niechętnie matematyki, bądź czują do niej awersję i do kształcenia matematycznego?

Analiza współczesnej literatury dotyczącej tematu tej pracy i przykładów zadań matematycznych z praktyki kształcenia matematycznego, analiza porównawcza wyników badań PISA i przykłady case study research z dydaktyki matematyki potwierdzają, że kształcenie matematyczne uczniów i studentów dla potrzeb przyszłości jest w kryzysie. Te doświadczenia skuteczności (bądź nieskuteczności) praktyki kształcenia matematycznego w Federacji Rosyjskiej, Polsce, Kazachstanie i w innych krajach, wyniki i wnioski z przeprowadzonych badań PISA i innych pozwalają stwierdzić, że wysoką jakość i efektywność kształcenia matematycznego określają m.in. tradycje historyczne i kulturowe, artykułowane i przyjęte jego priorytety, aktualne uwarunkowania innowacyjnego rozwoju danego kraju. W podsumowaniu pracy wyłania się pewna diagnoza stanu akceptacji kształcenia matematycznego uczniów i studentów w integracji z drugimi przedmiotami, uzyskane wyniki i wnioski. Otóż skuteczne wdrożenie ich do praktyki tego kształcenia na poziomie szkolnym lub akademickim powinno wymagać: 1) artykułowania roli i znaczenia matematyki w rozwoju ich pamięci i logicznego myślenia, w intelektualnym rozwoju człowieka; 2) kształcenia kluczowych umiejętności matematycznych typu: „umieć myśleć logicznie"; „umieć czytać i przyswajać"; „umieć widzieć"; „umieć rozwiązywać" i innych; 3) wskazywania przykładów na to, że bez uczenia się matematyki i znajomości matematyki trudno jest funkcjonować w dorosłym życiu, jeszcze trudniej jest osiągnąć sukcesy zawodowe; 4) gromadzenia doświadczeń w poszukiwaniu i stosowaniu sposobów, metod rozwiązywania zadań i problemów matematycznych, odkrywania i dowodzenia twierdzeń matematycznych, bądź doświadczeń w weryfikacji prawdziwości formułowanej hipotezy/tezy matematycznej. Ponadto wskazane priorytety powinny być skorelowane z koncepcją modernizacji kształcenia matematycznego, wdrażania jego programu w praktyce na poziomie szkolnym lub akademickim, a także z doskonaleniem praktyki funkcjonowania i kształcenia kadry nauczycieli matematyki, wymianą ich doświadczeń i podnoszeniem kwalifikacji zawodowych.

Maciej PAROL

Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej (Lublin)

Splot podzbiorów płaszczyzny zespolonej

Prezentowane wyniki dotyczą własności i zastosowań splotu zbiorów $A, B \subset \mathbf{C}$ określonego wzorem
$$A \circledast B := \left\{ z \in \mathbf{C} \setminus \{0\} : \bigvee_{\gamma \in \Gamma_0} \gamma([0; 2\pi]) \subset A \cap (z/B) \right\} ,$$
gdzie Γ_0 jest klasą wszystkich dróg zamkniętych $\gamma : [0; 2\pi] \to \mathbf{C} \setminus \{0\}$ takich, że $\operatorname{ind}_\gamma(0) = 1$. W szczególności wyniki te opisują podstawowe własności algebraiczne operacji $\circledast$ jak na przykład: łączność, przemienność, brak elementu neutralnego.

Splot zbiorów ma zastosowanie w wyznaczaniu uniwersalnego maksymalnego obszaru przedłużeń holomorficznych splotu Hadamarda funkcji holomorficznych w zadanych obszarach płaszczyzny zespolonej.

Poster jest oparty na wynikach uzyskanych wspólnie z Dariuszem Partyką.

Dariusz PARTYKA

Katolicki Uniwersytet Lubelski Jana Pawła II (Lublin)
Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa w Chełmie (Chełm)

Quasi-konforemność odwzorowań harmonicznych w kole jednostkowym

Prezentowane wyniki są związane z następującym warunkiem quasi-konforemności

$$\sup_{z\in\mathbf{D}}\left|\frac{G'(z)}{H'(z)}\right| < 1$$

odwzorowania harmonicznego $F = H + \overline{G}$ w kole jednostkowym $\mathbf{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, gdzie H i G są funkcjami holomorficznymi w $\mathbf{D}$. O odwzorowaniu F zakłada się dodatkowo, że jest różnowartościowe i zachowuje orientację. W szczególności omawiane są warunki typu Lipschitza dla quasi-konforemnych i harmonicznych odwzorowań $F : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$, które spełniają pewne dodatkowe założenia jak na przykład wypukłość obrazu $F(\mathbf{D})$ bądź $H(\mathbf{D})$.

Odczyt jest oparty na wynikach uzyskanych wspólnie z Ken-ichi Sakanem i Jian-Feng Zhu.

Krzysztof PIEJKO, Lucyna TROJNAR-SPELINA

Rzeszow University of Technology (Rzeszów)

Some kind of colouring in graphs

We investigate the number of $(A, 2B, 2C)$-edge colourings of some special graphs. A new graph interpretations for some well-known sequences was found. We also introduce a new kinds of sequences of the Fibonacci type and give their interpretations with respect to the number of $(A, 2B, 2C)$-edge colourings of graphs. Some identities for these sequences and matrix representations of them are also given.

References

[1] C. Berge, *Principles of Combinatorics*, Academic Press, New York and London, 1971.
[2] S. J. Cyvin, I. Gutman, *Kekulé structures in benzoid hydrocarbons*, Lecture Notes in Chemistry, no. 46, Springer, New York, 1988.
[3] R. Diestel, *Graph Theory*, Springer-Verlag, Heidelberg, New York, Inc., 2005.
[4] K. Piejko, *On the number of $(A, B, 2C)$-edge colourings in graphs* (accepted in Ars Combinatoria).
[5] K. Piejko, *Extremal trees with respect to numbers of $(A, B, 2C)$-edge colourings*, J. Appl. Math. **2015** (2015), Article ID 463650, 5 pages.
[6] K. Piejko, I. Włoch, *On k-distance Pell numbers in 3-edge-coloured graphs*, J. Appl. Math. **2014** (2014), Article ID 428020, 6 pages.
[7] L. Trojnar-Spelina, I. Włoch, *On Pell numbers and (k_1A_1, k_2A_2, k_3A_3)-edge colouring in graphs*, Ars Combinatoria **125** (2016), 183-191.

Oleksandr I. PROVOTAR

University of Rzeszów (Rzeszów)

Reliability in fuzzy models of pattern recognition

It is known that the fuzzy sets [1, 2, 3] are the convenient tool to present knowledge in information systems. Using the fuzzy sets is possible to outline, for instance, the picture of symptoms of the patient in expert diagnostics systems. Determination of the diagnosis in such systems requires using the mechanisms of logical inference. In particular, in case of the fuzzy specifications as symptoms as well diagnostics such mechanisms can be so called the fuzzy inference systems, which was built based on ideas and methods of inductive mathematics [4].

The fuzzy specification of problem means ordered set of fuzzy instructions. The fuzzy specification of the problem with the algorithm during fulfilling which the approximate (fuzzy) solution of the problem is received will be called as fuzzy inference system.

The proposed approach (based on fuzzy models) allows to simplify the methods of solving of above mentioned problems. But, there is a necessity for additional studies of the results of reliability. These investigations use the classical concepts of probability and fuzziness.

Fuzzy set

$$A = \{(x, \mu_A(x)), x \in X\}$$

in the space X will be called a fuzzy event in space X, where $\mu_A : X \to [0, 1]$ – membership function of fuzzy set A.

A probability of fuzzy event A can be calculated according to the formula

$$P(A) = \sum \mu_A(x)P(x),$$

where $P(x)$ is a function of the probability distribution [5].

To calculate the reliability of the results of fuzzy inference systems, we can use the analogue of law of total probability. This law allows to evaluate the reliability of the fuzzy inference system outputs (inputs) by analogy with [5].

References

[1] G. J. Klir, B. Yuan, *Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, and Fuzzy Systems. Selected Papers by Lotfi A. Zadeh*, Advances in Fuzzy Syst., Appl. Theory, Vol. **6**, World Scientific Publishing Co., Inc., Singapore, 1996.

[2] A. I. Provotar, A. V. Lapko, A. A. Provotar, *Fuzzy Inference Systems and Their Applications*, Int. Sci. J. Cybernetics and Syst. Anal. **49** (2013), 517-525.

[3] D. Rutkowska, M. Pilinski, L. Rutkowski, *Sieci Neuronowe, Algorytmy Genetyczne i Systemy Rozmyte*, Wydawnictwo Naukove PWN, Warszawa, 1997 (in Polish).

[4] A. M. Gupal, I. V. Sergienko, *Optimal Recognition Procedures*, Naukova Dumka, Kyiv, 2008 (in Russian).

[5] J. J. Buckley, *Fuzzy Probabilities: New Approach and Applications*, In: Studies in Fuzziness and Soft Computing Springer, Vol. **115**, Springer, Heidelberg, Germany, 2005.

Marta PYTLAK

University of Rzeszów (Rzeszów)

Strategies used by the first grade of primary school students during the work on the geometric task concerning arranging the plane

The importance of geometry not only in mathematical education, but also in general education it is said quite often. The open question remains, how to exploit the potential and power of the geometry in the development of student's mathematical thinking. In this paper I present the preliminary results of the research carried out among the students from the first grade of primary school. They show how students deal with arrangement of the planes.

Ewa RAK

Uniwersytet Rzeszowski (Rzeszów)

Wykorzystanie warunkowej rozdzielności pewnych funkcji agregacji w problemach podejmowania decyzji

Rozwiązania równania rozdzielności w dużej mierze zależą od wyboru klasy funkcji, w której poszukujemy rozwiązań. Obecnie wiele badań dotyczy równania rozdzielności dla działań określonych w przedziale jednostkowym (tzw. operatorów agregacji [1]). Wynika to z możliwości jego wykorzystania m.in. w problemach podejmowania decyzji w warunkach niepewności [2, 3, 5].

Niniejsze opracowanie przedstawia rozwiązania warunkowego równania rozdzielności dla pary agregacji z klasy 2-uninorm z elementem zerowym ([6]) oraz klasy konorm trójkątnych ([4], str. 13) wraz z ich znaczeniem w opisie hybrydowej funkcji użyteczności z nałożonym progiem [2], a w efekcie modelowaniu zachowań decydenta.

Literatura

[1] T. Calvo, G. Mayor, R. Mesiar, *Aggregation Operators: New Trends and Applications*, Stud. Fuzziness Soft Comput. vol. **97**, Springer, Berlin, Heidelberg, 2002.

[2] D. Dubois, E. Pap, H. Prade, *Hybrid probabilistic-possibilistic mixtures and utility functions*, in: Preferences and Decisions under Incomplete Knowledge, in: Stud. Fuzziness Soft Comput. vol. **51**, Springer-Verlag, 2000, pp. 51–73.

[3] D. Jočić, I. Štainer-Papuga, *Some implications of the restricted distributivity of aggregation operators with absorbing elements for utility theory*, Fuzzy Sets Syst. **291** (2016), 54-65.

[4] E. P. Klement, R. Mesiar, E. Pap, *Triangular Norms*, Kluwer, Dordrecht, 2000.

[5] A. Lundberg, *Variants of the distributivity equation arising in theories of utility and psychophysics*, Aequationes Math. **69** (2005), 128-145.

[6] P. Drygaś, E. Rak, *Distributivity equation in the class of 2-uninorms*, Fuzzy Sets Syst. **291** (2016), 82-97.

Bożena ROŻEK

Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie, Instytut Matematyki (Kraków)

Struktury wizualne osób na różnych poziomach doświadczenia matematycznego - raport z badań eyetrackingowych

Współcześni badacze coraz częściej zwracają uwagę na konieczność uwzględnienia wiedzy dotyczącej struktury i funkcji mózgu w procesach dydaktycznych. Jedną z nieinwazyjnych metod, które mogą dostarczyć wiedzy na temat funkcjonowania mózgu są badania prowadzone za pomocą eye-trackera, urządzenia służącego do śledzenia ruchu gałki ocznej osoby badanej. Zastosowanie tej metody wydaje się być uzasadnione szczególnie w badaniach nad procesem rozwiązywania zadań matematycznych, które wymagają wzrokowej analizy struktur wizualnych.

W referacie zostaną przedstawione teoretyczne rozważania dotyczące struktur wizualnych w sensie van Hielego, a w szczególności zostanie omówiony proces przełączania się z jednej struktury wizualnej do innej struktury postrzeganego obiektu. Prezentowane badania empiryczne związane z rozwiązywaniem przez osoby na różnym poziomie doświadczenia matematycznego wybranych zadań testowych prowadzone były metodą eyetrackingową. Wyniki badań wskazują, że umiejętność dostrzegania kilku struktur w tym samym obiekcie oraz umiejętność przełączania się między strukturami sprzyja rozwijaniu myślenia matematycznego.

Sławomir SOREK

Uniwersytet Rzeszowski (Rzeszów)

Operacje potęgowania i splotu na dystrybucjach w sensie neutriksów i ich zastosowanie w teorii sygnałów

Przypominamy podstawowe idee teorii neutriksów van der Corputa przedstawione w pracy [1]. Teorię tę z odpowiednimi modyfikacjami wykorzystujemy do badania operacji potęgowania i splotu na dystrybucjach. Otrzymane wyniki stosujemy do pewnych zagadnień w teorii sygnałów, dotyczących zależności zachodzących w układach i obwodach nieliniowych.

Wyniki wspólne z Profesorem Andrzejem Kamińskim

Literatura

[1] J. G. van der Corput, *Introduction to the neutrix calculus*, J. Analyse Math. **7** (1959-60), 281–398.

Jan STANKIEWICZ

Profesor Senior Politechniki Rzeszowskiej im. Ignacego Łukasiewicza i Uniwersytetu Rzeszowskiego (Rzeszów)

Pewne problemy otwarte w teorii funkcji zespolonych

Spotykamy się niekiedy z badaniem funkcji zespolonych holomorficznych w kole jednostkowym $\mathbf{U} = \mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_d = \{z : |z| < d\}$, które w pewnym kole mniejszym $\mathbf{U}_d$, $d < 1$, spełniają dodatkowe warunki typu geometrycznego (jednolistność, gwiaździstość, wypukłość) lub analitycznego ($\operatorname{Re} f'(z) > 0$).

Znalezienie w tym przypadku dokładnych oszacowań, zależnych od parametru d, jest trudne, często niemożliwe.

Chciałbym przedstawić pewne klasy funkcji tego typu, gdzie dokładne oszacowania, nawet prostych funkcjonałów, nie są znane.

Przez $\mathbf{H}$ oznaczmy klasę funkcji holomorficznych w $\mathbf{U}$ i klasycznie unormowanych: $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$.

Przykłady.

1. Klasa $\mathbf{H}_d^c$ zawierająca te funkcje klasy $\mathbf{H}$, które koło $\mathbf{U}_d$, $d < 1$, ustalone, odwzorowują jednolistnie na obszar wypukły.
2. Klasa $\mathbf{H}_d^*$ zawierająca te funkcje klasy $\mathbf{H}$, które koło $\mathbf{U}_d$, $d < 1$, ustalone, odwzorowują jednolistnie na obszar gwiaździsty.
3. Klasa $\mathbf{H}_d^s$ zawierająca te funkcje klasy $\mathbf{H}$, które są są jednolistne w kole $\mathbf{U}$ i gwiaździste w kole $\mathbf{U}_d$, $d < 1$, ustalone.
4. Klasa $\mathbf{S}_d^{*c}$ zawierająca te funkcje klasy $\mathbf{H}$, które są jednolistne w kole $\mathbf{U}$ oraz odwzorowują koło $\mathbf{U}_d$, $d > r^c$, gdzie r^c jest promieniem wypukłości funkcji gwiaździstych, na obszar wypukły.

Badania takich klas pojawiają się niekiedy w sposób naturalny i są interesujące same w sobie.

Zbigniew SURAJ, Katarzyna GARWOL
Piotr GROCHOWALSKI

Uniwersytet Rzeszowski (Rzeszów)

Analiza portalu Matematycy i Informatycy Podkarpacia + z punktu widzenia użytkownika

Na Podkarpaciu funkcjonuje od kilku dziesięcioleci ponad dwadzieścia wyższych uczelni. Zatrudniają one dość znaczną liczbę znanych osób zajmujących się m.in. matematyką, informatyką lub ich zastosowaniami. Coraz bardziej widoczne są osiągnięcia tych osób nie tylko na arenie krajowej, ale także na arenie międzynarodowej. Publikowane na portalu internetowym pn. "Matematycy i Informatycy Podkarpacia+"(w skrócie na portalu MIP) [1] biografie dotyczą na ogół nieżyjących, zasłużonych dla regionu i środowiska nauczycieli (nie tylko akademickich), urodzonych lub pracujących w różnych okresach czasu na terenie obecnego regionu podkarpackiego i obszarów ościennych, wyróżniających się swą aktywną działalnością naukową, dydaktyczną, popularyzatorską w dziedzinie matematyki i informatyki, a także specjalistów z innych dziedzin nauki, którzy są autorami publikacji matematycznych i informatycznych oraz w znacznym stopniu przyczynili się do rozwoju tych dwóch dyscyplin naukowych. Ponadto uwzględniono ludzi, którzy wnieśli znaczący wkład w rozwój kadry naukowej specjalizującej się w zakresie matematyki i informatyki. Wprawdzie wielu z nich nie ma już wśród nas, ale pragniemy, by ich sylwetki, a przede wszystkim dokonania pozostały na długo w naszej wdzięcznej pamięci i naszych następców.

Celem artykułu jest zaprezentowanie zawartości portalu MIP ze szczególnym uwzględnieniem aspektów wizualnych, funkcjonalnych tej aplikacji z punktu widzenia użytkownika portalu, a także wyników analizy statystycznej danych zawartych w bazie danych aplikacji. Portal MIP posiadał do tej pory już kilka wersji a prezentowana obecnie została udoskonalona i rozszerzona pod kilkoma względami, w tym graficznym, użytkowym i wizualnym oraz wzbogacona o tzw. responsywność, która pozwala na dogodne użytkowanie portalu na urządzeniach mobilnych.

Twórcy portalu MIP pragnę podziękować wszystkim osobom, które współpracowały lub nadal współpracują z nimi przy zbieraniu niezbędnych informacji oraz tworzeniu, unowocześnianiu i utrzymaniu tej aplikacji.

Literatura

[1] Portal Matematycy i Informatycy Podkarpacia+, http://mip.ur.edu.pl/
[2] K. Garwol, *Portal biograficzno-naukowy Matematycy i Informatycy Podkarpacia+*, Konferencja "Śladami kobiet w matematyce - w stulecie urodzin profesor Heleny Rasiowej", 22-24 czerwca 2017, Rzeszów.

Zbigniew SURAJ, Piotr GROCHOWALSKI

Uniwersytet Rzeszowski (Rzeszów)

System ekspertowy oparty na rozmytych sieciach Petriego i jego zastosowanie w dziedzinie marketingu

Marketing jest dziedziną ściśle związaną z gospodarką rynkową dotyczącą głównie sprzedaży, dystrybucji, reklamy, planowania produkcji, badań rynku. Celem marketingu jest z jednej strony przystosowanie firmy do zmiennych warunków rynku, z drugiej zaś - oddziaływanie i kształtowanie rynku. Prowadzenie skutecznych działań marketingowych oznacza częstokroć podejmowanie wielu istotnych i trafnych decyzji. Nie zawsze jednak osoby podejmujące decyzje, posiadają wystarczającą wiedzę i niezbędne kompetencje w wymaganym zakresie. Pewną pomoc w tym względzie mogą świadczyć tzw. systemy ekspertowe bazujące na metodach sztucznej inteligencji [1]. Systemy te są dedykowane do rozwiązywania skomplikowanych problemów, wymagających obszernej wiedzy eksperta. Służą one wsparciem w rozwiązywania trudnych problemów decyzyjnych, oferując kompetencje bliskie ludzkim ekspertom. Systemy ekspertowe nie działają na drodze poszukiwania rozwiązań algorytmicznych a wykorzystują zgromadzoną wiedzę na temat rozwiązywanego problemu oraz metody automatycznego wnioskowania.

Celem referatu jest zaprezentowanie wstępnych wyników prac poświęconych analizie możliwości zastosowania rozmytych sieci Petriego [2] w budowie systemu ekspertowego wspomagającego podejmowanie decyzji marketingowych na przykładzie doboru medium reklamy. Dotychczas wykonane prace pozwalają na sformułowanie tezy, iż systemy ekspertowe budowane w oparciu o proponowaną technologię mogą być skutecznym narzędziem wspomagania decyzji, pozwalając jednocześnie na uporządkowanie i strukturalizację wiedzy dziedzinowej jak i optymalizację procesu wnioskowania w rozważanym zastosowaniu.

Projektowany system ekspertowy będzie istotną częścią składową systemu PNeS (*ang.* Petri Net System) [3], który jest przeznaczony głównie do wspomagania modelowania i analizy systemów współbieżnych z wykorzystaniem sieci Petriego [4, 5]. Jest on również bardzo przydatny w badaniach naukowych związanych z eksperymentalną weryfikacją opracowywanych metod i algorytmów z obszarów jego działania.

Literatura

[1] J. J. Mulawka, *Systemy ekspertowe*, WN-T, Warszawa, 1996.

[2] Z. Suraj, *A new class of fuzzy Petri nets for knowledge representation and reasoning*, Fund. Inf. **128** (2013), no. 1-2, 193-207.

[3] Z. Suraj, P. Grochowalski, *Petri Nets and PNeS in Modeling and Analysis of Concurrent Systems*, Proc. Int. Workshop on Concurrency, Specification and Programming (CS&P 2017), Warsaw, Poland, September 25-27, 2017.

[4] Z. Suraj, P. Grochowalski, *Zastosowanie sieci Petriego w modelowaniu i analizie systemów współbieżnych na przykładzie prostego systemu produkcyjnego*, Konferencja naukowa nt. "Współczesne Oblicza Informatyki", 12-13 X 2017, Jarosław.

[5] Z. Suraj, M. Szpyrka, *Sieci Petriego i PN-tools*, Wydawnictwo WSP, Rzeszów, 1999.

Ewa SWOBODA

Uniwersytet Rzeszowski (Rzeszów)

Geometryzacja jako dydaktyczne wyzwanie

Do rozumienia matematyki jako abstrakcyjnej struktury wiedzie długa drogą. Zaczyna się ona jednak w próbie zrozumienia i opisu otaczającego nas świata. Postrzeganie świata zależy od wielu czynników, a jego opis może zmierzać w różnych kierunkach. Dydaktycznym wyzwanie jest takie ukierunkowanie umysłu dziecka lub młodego człowieka, aby potrafił spojrzeć na świat oczyma matematyka. Czym różni się to spojrzenie od spojrzenia choćby fizyka, nie mówiąc o odczytywaniu świata przez literatów czy socjologów? Czy tę umiejętność niektórzy mają wrodzoną? A jeżeli nie - czy można ją kształcić?

Matematyzacja świata w kierunku tworzenia pojęć i rozumowań geometrycznych jest szczególnym dydaktycznym wyzwaniem. Na obecnym etapie wiedzy dydaktycznej jesteśmy przekonani, że ten proces przebiega inaczej niż w obrębie pojęć arytmetycznych. W ramach wykładu przedstawię własne przemyślenia na ten temat, wsparte przykładami pracy uczniów.

Katarzyna SZYMAŃSKA-DĘBOWSKA

Politechnika Łódzka (Łódź)

Układy równań rzędu pierwszego z nielokalnymi warunkami brzegowymi

Rozważmy rezonansowe nielokalne zagadnienia brzegowe postaci

$$x' = f(t,x), \quad x(1) = \int_0^1 x(s)\mathrm{d}g(s),$$

$$x' = f(t,x), \quad x(0) = \int_0^1 x(s)\mathrm{d}g(s),$$

gdzie $f : [0,1] \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ jest ciągła, $g = \mathrm{diag}(g_1, \dots, g_n)$, $g_i : [0,1] \to \mathbf{R}$ ma ograniczone wahanie oraz $\int_0^1 \mathrm{d}g_i(s) = 1$ $(i = 1, \dots, n)$. Istnienie rozwiązań takich zagadnień wykazano wykorzystując twierdzenie kontynuacyjne Leraya-Schaudera. Oszacowanie a priori wynikają z istnienia otwartego, ograniczonego zbioru wypukłego $C \subset \mathbf{R}^n$ takiego, że dla każdego $t \in [0,1]$ oraz $x \in \overline{C}$, pole wektorowe $f(t,\cdot)$ spełnia pewne geometryczne warunki na ∂C. Szczególne przypadki, gdy C jest kulą lub kostką są rozważane.

Literatura

[1] J. Mawhin, K. Szymańska-Dębowska, *Convex sets, fixed points and first order systems with nonlocal boundary conditions at resonance*, J. of Nonlinear and Convex Anal. **18**, no. 1, (2017), 149–160.

Anetta SZYNAL-LIANA, Iwona WŁOCH

Politechnika Rzeszowska im. Ignacego Łukasiewicza (Rzeszów)

Hiperzespolone liczby Jacobsthala

Dla całkowitych liczb nieujemnych n liczby Jacobsthala J_n definiujemy rekurencyjnie $J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$, z warunkami początkowymi $J_0 = 0$, $J_1 = 1$. Liczby Jacobsthala-Lucasa j_n definiujemy wzorem $j_n = j_{n-1} + 2j_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$, z warunkami początkowymi $j_0 = 2$, $j_1 = 1$.

Przedstawione zostaną własności kwaternionów, oktonionów i dwuzespolonych liczb Jacobsthala i Jacobsthala-Lucasa.

Literatura

[1] C. B. Çimen, A. İpek, *On Jacobsthal and Jacobsthal–Lucas Octonions*, Mediterranean J. Math. (2017), 14-27.
[2] A. F. Horadam, *Jacobsthal representation numbers*, The Fibonacci Quarterly **34** (1988), 40-54.
[3] M. Liana, A. Szynal-Liana, I. Włoch, *On bicomplex Jacobsthal numbers* (w przygotowaniu).
[4] A. Szynal-Liana, I. Włoch, *A note on Jacobsthal quaternions*, Advances in Applied Clifford Algebras **26** (2016), 441-447.

AGNIESZKA TANAŚ

Lublin University of Technology (Lublin)

Evolution of states of a finite fission-death system

The Markov evolution of the fission-death model is described by the Kolmogorov equation

$$\dot{F}_t = LF_t, \quad F_t|_{t=0} = F_0, \tag{1}$$

where $\dot{F}_t$ denotes the time derivative and $F_t : \Gamma \to \mathbf{R}$ is an *observable* at time t. The expression LF determines the model, and in this case it is

$$(LF)(\gamma) = \sum_{x\in\gamma} \left(m(x) + \sum_{y\in\gamma\setminus x} a(x-y) \right) [F(\gamma \setminus x) - F(\gamma)] \tag{2}$$

$$+ \sum_{x\in\gamma} \int_{(\mathbf{R}^d)^2} b(x|y_1, y_2) \left[F(\gamma \setminus x \cup \{y_1, y_2\}) - F(\gamma) \right] \mathrm{d}y_1 \mathrm{d}y_2.$$

The first term in (2) describes the death of the particle located at x occurring independently with rate $m(x) \geqslant 0$ and under the influence (competition) of the other particles in configuration γ – with rate $E^a(x, \gamma \setminus x) := \sum_{y\in\gamma\setminus x} a(x-y) \geqslant 0$. The second summand in (2) corresponds to independent fission with rate $b(x|y_1, y_2) \geqslant 0$.

The evolution of states $\mu_0 \mapsto \mu_t$ is obtained from that described by (1) according to the rule $\mu_0(F_t) = \mu_t(F_0)$, i.e., as the dual evolution. Then it can also be defined by the Fokker-Planck equation

$$\dot{\mu}_t = L^* \mu_t, \quad \mu_t|_{t=0} = \mu_0. \tag{4}$$

Here we assume that the initial state in the Fokker-Plank equation (4) has the property $\mu_0(\Gamma_0) = 1$, that is, the system in μ_0 is finite. Then the evolution related to (4) is constructed in the Banach space of signed measures with bounded variation, where the generator L^* is defined as an unbounded linear operator and C_0-semigroup techniques can be applied.

REFERENCES

[1] A. Tanaś, *A continuum individual based model of fragmentation: dynamics of correlation functions*, Annales UMCS, sectio A - Mathematica **69** (2015), 73-83.

[2] Y. Kondratiev, Y. Kozitsky, *The Evolution of States in a Spatial Population Model*, J. of Dynamics and Diff. Equat. 2016, 1-39; DOI 10.1007/s10884-016-9526-6.

[3] H. R. Thieme, J. Voigt, *Stochastic semigroups: Their construction by perturbation and approximation*, in Positivity IV Theory and Applications, eds. M. R. Weber, J. Voigt (Tech. Univ. Dresden), 2006, 1135-1146.

RENATA TŁUCZEK-PIĘCIAK

Uniwersytet Rzeszowski (Rzeszów)

Niezmiennicze ciągowe podprzestrzenie w dziedzinie operatorów nieograniczonych

W tej pracy rozważano dowolny domknięty, liniowy, nieograniczony operator gęsto określony w zespolonej przestrzeni Banacha. Używając metody interpolacji rzeczywistej w sposób standardowy skonstruowano przestrzenie środkowe pomiędzy dziedzinami kolejnych iteracji operatora i zdefinowano niezmiennicze ciągowe podprzestrzenie typu Lorentza dla iteracji tego operatora. Na zakończenie rozważania zilustrowano przykładem.

Literatura

[1] A. Bednarz, O. Lopushansky, *Exponential type vectors of isometric group generators*, Matem. Studii (Proc. Lviv Math. Soc.) **18** (2002), no. 1, 99-106.
[2] J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation Spaces*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1976.
[3] N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear Operators, Part I: General Theory*, Interscience, New York, 1957.
[4] V. I. Gorbachuk, A. Knyazyuk, *The boudary value of solutions of differential-operators equations*, Uspekhi Matem. Nauk **44** (1989), no. 3, 55-91.
[5] B. Langemann, *Über greensche funktionen singularer elliptischer differentialoperatoren*, Studia Math. **45** (1973), 241-255.
[6] Ju. I. Ljubič, V. I. Macaev, *On operators with a separable spectrum*, Amer. Math. Soc. Transl. (2) **47** (1965), 89-129.
[7] O. Lopushansky, M. Dmytryshyn, *Vectors of exponential type of operators with discrete spectrum*, Matem. Studii (Proc. Lviv Math. Soc.) **9** (1998), no. 1, 70-77.
[8] O. Lopushansky, M. Dmytryshyn, *Operator calculus on the exponential type vectors of the operator with point spectrum (in book "General Topology in Banach Spaces")*, Nova Sci. Publ., Huntingon, New York, 2001.
[9] V. I. Gorbachuk, M. L. Gorbachuk, *On approximation of smooth vectors of closed operator by entire exponential type vectors*, Ukrain. Math. J. **47** (1995), no. 5, 616-628.
[10] E. Muller-Pfeiffer, *Zur Theorie Elliptischer und Hypoelliptischer Differentialoperatoren*, Habilitationsschrift, Jena, 1967.
[11] S. M. Nikolskii, *Approximation of Functions of Several Variables and Embeddings Theorems*, Sciense, Moskow, 1977.
[12] Ya. Radyno, *The vectors of exponential type in operators calculus and differential equations*, Diferencialnye Urawnienija **21** (1985), no. 9, 1559-1569.
[13] G. Radzievskii, *The direct and invert theorems in approximation problems by finite degree vectors*, Matem. Sbornik **189** (1998), no. 4, 83-124.
[14] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1973.
[15] H. Triebel, *Interpolation Theory. Function Spaces. Differential Operators.*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1995.

Katarzyna TRĄBKA-WIĘCŁAW

Politechnika Lubelska (Lublin)

O problemie współczynników funkcji prawie wypukłych

Niech $\mathcal{A}$ oznacza klasę funkcji analitycznych i unormowanych klasycznie w kole jednostkowym $\Delta = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$, $\mathcal{S}^*$ klasę funkcji gwiaździstych w $\mathcal{A}$, zaś $\mathcal{P}$ klasę funkcji p o dodatniej części rzeczywistej w Δ spełniających warunek $p(0) = 1$.

Dla ustalonego $\beta \in (-\pi/2, \pi/2)$ i $g \in \mathcal{S}^*$ funkcję $f \in \mathcal{A}$ nazywamy prawie wypukłą względem g z argumentem β (close-to-convex with argument β with respect to g), jeśli

$$\mathfrak{Re}\left\{\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} z f'(z)}{g(z)}\right\} > 0, \quad z \in \Delta. \tag{1}$$

Niech $\mathcal{C}_\beta(g)$ będzie klasą takich funkcji. Ponadto niech

$$\mathcal{C}(g) = \bigcup_{\beta\in(-\pi/2,\pi/2)} \mathcal{C}_\beta(g) \quad \text{oraz} \quad \mathcal{C}_\beta = \bigcup_{g\in\mathcal{S}^*} \mathcal{C}_\beta(g)$$

będą odpowiednio klasą funkcji prawie wypukłych względem g oraz klasą funkcji prawie wypukłych z argumentem β. Niech $\mathcal{C}$ oznacza klasę funkcji prawie wypukłych. Oczywiście

$$\mathcal{C} = \bigcup_{\beta \in (-\pi/2, \pi/2)} \mathcal{C}_\beta = \bigcup_{g \in \mathcal{S}^*} \mathcal{C}(g).$$

Liczba $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$ jest niezbędna w (1) w definicji funkcji prawie wypukłych. W dodatku, czynnik ten znacznie komplikuje problem oszacowania pewnych funkcjonałów współczynnikowych. Dlatego wielu autorów, aby uprościć rachunki przyjmuje $\beta = 0$ lub używa konkretnej funkcji gwiaździstej, na przykład funkcji Koebego

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}, \quad z \in \Delta.$$

Wtedy nierówność (1) przyjmuje postać:

$$\mathfrak{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{g(z)}\right\} > 0, \quad z \in \Delta,$$

lub

$$\mathfrak{Re}\left\{e^{i\beta}(1-z)^2 f'(z)\right\} > 0, \quad z \in \Delta,$$

i definiuje odpowiednio podklasy klasy funkcji prawie wypukłych $\mathcal{C}_0$ i $\mathcal{C}(k)$.

Niniejsza praca dotyczy problemu oszacowania wyrażenia $|a_4 - a_2a_3|$, gdzie a_k są współczynnikami funkcji prawie wypukłej. Oszacowanie takie w różnych klasach funkcji analitycznych zastosowano do szacowania trzeciego wyznacznika Hankela $H_3(1)$ w tych klasach. Uzyskane przez nas rezultaty są dokładne dla dwóch podklas klasy funkcji prawie wypukłych $\mathcal{C}$. Mianowicie, $|a_4 - a_2a_3| \leqslant 2$ dla funkcji z klasy $\mathcal{C}_0$ i $\mathcal{C}(k)$. Przypuszczamy, że liczba 2 jest również dokładnym oszacowaniem wyrażenia $|a_4 - a_2a_3|$ w całej klasie $\mathcal{C}$.

Niniejsza prezentacja oparta jest na wspólnej pracy z Pawłem Zaprawą.

Bronisław WAJNRYB

Rzeszow University of Technology (Rzeszów)

The mapping class group of a surface is generated by two elements

The mapping class group of an orientable surface S of genus n is the group of the isotopy classes of the orientation preserving homeomorphisms of the surface S onto S. It can be generated by a finite number (at least 2n+1) of very simple homeomorphisms called Dehn twists. Homeomorphisms are investigated through their action on simple closed curves on the surface. I shall explain this action and I shall describe two homeomorphisms (one of them a Dehn twist) which generate the whole mapping class group.

References

[1] M. Dehn, *Die gruppe der Abdildungsklassen*, Acta Math. **69** (1938), 135–206.
[2] S. Humphries, *Generators for the mapping class group*, in: Topology of Low Dimensional Manifolds, Ed. by R. Fenn, Lecture Notes in Math. no. 722, Springer-Verlag, Berlin, 1979, 44–47.
[3] D. L. Johnson, *The structure of the Torelli group I: A finite set of generators for I*, Annals of Math. **118** (1983), no. 2, 423–442.
[4] M. Korkmaz, *Generating the surface mapping class group by two elements*, Trans. Amer. Math. Soc. **357** (2005), 3299-3310.
[5] W. B. R. Lickorish, *A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **60** (1964), 769–778.
[6] B. Wajnryb, *Mapping class group of a surface is generated by two elements*, Topology **35** (1996), 377–383.

Maja WENDERLICH

Akademia Pedagogiki Specjalnej im. Marii Grzegorzewskiej w Warszawie (Warszawa)

Kamienie milowe w biegu życia wybitnych matematyków i uzdolnionej matematycznie młodzieży

Przedmiotem badań i tematem referatu są kamienie milowe[1], które pojawiły się w biegu życia wybitnie, matematycznie uzdolnionych osób. Autorka wyodrębniła cztery grupy wiekowe: nieżyjących wybitnych profesorów matematyki, wybitnych żyjących profesorów matematyki, wybitnych doktorantów oraz olimpijczyków matematycznych. Posługując się metodą biograficzną, analizą dokumentów (dzienników, pamiętników, autobiografii, wywiadów rzek) oraz wywiadami narracyjnymi dokonała analizy biegów życia i losów matematycznie uzdolnionych osób w kontekście ich karier zawodowych.

Ciekawym rozwiązaniem jest również użycie metodologii zaproponowanej przez Charlotte Buhler. Niemiecka uczona, autorka wybitnej, ponadczasowej monografii: "*Bieg życia ludzkiego*" proponowała holistyczne spojrzenie na rozwój człowieka. Bieg życia ludzkiego dzieliła na fazy przeżyć oraz fazy dokonań. Poszczególne fazy przeżyć nakładają się na fazy dokonań i odwrotnie. Rozpatrywała ścieżki życia ludzkiego w różnych kontekstach, posługując się przy tym min. narzędziami graficznymi.

Mimo, iż otrzymane dane mogą mieć moc teorii średniego zasięgu, jest to bez wątpienia przyczynek do dalszych, pogłębionych analiz. Otrzymane dane oraz ich odpowiednia interpretacja, mogą przyczynić się do poprawy organizacji procesów dydaktycznych (zarówno w szkole jak i w domu), jak również podniesienia jakości życia wybitnie, matematycznie uzdolnionych osób.

Marcin WESOŁOWSKI, Piotr GRONKOWSKI

Uniwersytet Rzeszowski (Rzeszów)

Zastosowanie teorii rozpraszania Lorenza – Mie do numerycznego modelowania zjawiska wybuchu komet

Komety należą do najbardziej zmiennych, trudno przewidywalnych, a jednocześnie najciekawszych ciał niebieskich. Podstawowym składnikiem każdej komety jest jej jądro – trwała struktura będąca nośnikiem masy kometarnej, która porusza się względem Słońca po orbicie będącej w przybliżeniu elipsą, parabolą lub hiperbolą. Jądra komet mają kształt nieregularnych brył o wymiarach od kilku do kilkudziesięciu kilometrów. Zbudowane są one z lodu wodnego z domieszką zestalonych substancji takich jak: CO, CO_2, NH_3, itp. Jądra komet zawierają także okruchy skalne i pył kosmiczny. Najprawdopodobniej komety penetrujące wewnętrzne obszary Układu Słonecznego pochodzą z dwóch źródeł: Obłoku Oorta lub Dysku (Pasa) Kuipera.

Światło słoneczne docierające do halo pyłowo – lodowego ulega rozproszeniu na cząstkach materii kometarnej. Natężeenie światła rozproszonego przez kometę jest funkcją przekroju czynnego na rozproszenie fali elektromagnetycznej. Halo pyłowo – lodowe komety zawiera cząstki o wymiarach rzędu od 0.1 μm do 1 centymetra. Jednakże najwięcej cząstek ma wymiary rzędu 1 μm, a więc są one porównywalne z długością fal świetlnych. Ziarna kometarne mają przekrój rozproszeniowy, będący skomplikowaną funkcją ich kształtu i wymiaru. W celu uroszczenia naszych

[1]Wydarzenia, osoby, rzeczy, które miały bezpośredni związek z ukierunkowaniem umysłu w stronę matematyki.

rozważań zakładamy, że ziarna materii kometarnej znajdujące się w głowie komety mają kształt kulisty.

W referacie zostanie przedyskutowane zastosowanie teorii rozpraszania Lorenza – Mie do numerycznego modelowania zjawiska wybuch komet. Pod pojęciem wybuchu należy rozumieć nagły nieoczekiwany wzrost jasności tych ciał niebieskich o więcej niż 1 wielkość gwiazdową.

Literatura

[1] C. F. Bohren, D. R. Huffmann, *Absorption and scattering of light by small particles*, Wiley & Sons Inc., New York, 1983, pp. 470-483.
[2] P. Gronkowski, M. Wesołowski, *A model of cometary outburst: a new simple approach to the classical question*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **451** (2015), no. 3, 3068-3077.
[3] P. Gronkowski, M. Wesołowski, *A review of cometary outbursts at large heliocentric distances*, Earth Moon and Planets, **119** (2016), no. 1, 23-33.
[4] G. Mie, *Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen*, Ann. Phys. **330** (1908), 377-445.
[5] H. C. Van de Hulst, *Light Scattering by small particles*, Wiley, New York, 1957.
[6] W. J. Wiscombe, *Improved Mie scattering algorithms*, Appl. Opt. **19** (1980), 1505-1509.

Agnieszka WIŚNIOWSKA-WAJNRYB

Rzeszow University of Technology (Rzeszów)

Some results on the order of starlikeness of uniformly convex functions

Let S denote the class of all functions f that are analytic and univalent in the open unit disk U and normalized by $f(0) = f'(0) - 1 = 0$. A function $f \in S$ is called starlike of order α if and only if

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > \alpha \quad \text{for all} \quad z \in U.$$

We denote by $ST(\alpha)$, $0 \leqslant \alpha < 1$, the class of all starlike functions of order α.

For an arbitrary class G of normalized analytic functions the number

$$\alpha^*(G) = \sup\{\alpha \in [0, 1) : G \subset ST(\alpha)\}$$

is called the order of starlikeness of the class G. It is known that if $f \in S$ is convex, then $f \in ST(1/2)$ and the number $1/2$ is the best possible.

A function $f \in S$ is said to be k-uniformly convex in U, $k \geqslant 0$, if for every circular arc γ contained in U, with center at ζ, where $|\zeta| \leqslant k$, the arc $f(\gamma)$ is convex.

The aim of this note is to present some results on the order of starlikeness of k-uniformly convex functions.

References

[1] A. W. Goodman, *On uniformly convex functions*, Ann. Polon. Math. **56** (1991), no. 1, 87-92.
[2] S. Kanas, A. Wiśniowska, *Conic regions and k-uniform convexity*, J. Comp. Appl. Math. **104** (1999), 327-336.
[3] R. Szász, P. A. Kupán, *The exact order of starlikeness of uniformly convex functions*, Comp. Math. Appl. **62** (2011), 173-186.
[4] A. Wiśniowska-Wajnryb, *The order of starlikeness of the class of uniformly starlike functions*, Math. Nachr. **289** (2016), no. 16, 2083–2088.
[5] A. Wiśniowska-Wajnryb, *The order of starlikeness of uniformly convex functions*, J. Appl. Anal. **23** (2017), no. 1, 33–38.

Anna ZAJĄC

Gdańsk University of Technology (Gdańsk)

Complex Lagrange Theorem and univalence criterions

Classical complex analysis inherits a number of mathematical ideas, that have been existing previously on the ground of real analysis. Both sides differences, same in methods as in theory, of real and complex functions theory are still of high capacity. This presentation shows a method of adopting and applying the well-known Lagrange average theorem to the analytic functions family and then to apply it in order to formulate a new univalence criterion.

Józef ZAJĄC

State School of Higher Education in Chełm (Chełm)

Elementary knowledge in function space research

The domain set, functions space and the value obtained set, form a triple of basic elements, appearing when we research a given family of functions. Specifying properly this triple one may find its scientific interest situated in different areas of mathematics. The main interest of our lecture will be study of a given functions space by describing its value set, obtained, as an image, of a given domain set point, under the family of harmonic mappings. Mentioned above the family of mappings will be reduced here to harmonic functions, defined in the unit disc with boundary normalization points. Some other cases will also be considered during the lecture.

Małgorzata ZAMBROWSKA

Akademia Pedagogiki Specjalnej im. Marii Grzegorzewskiej w Warszawie (Warszawa)

Klocki Dienesa dawniej i dzisiaj. O rozwijaniu umiejętności rozumowania matematycznego młodszych uczniów

W latach sześćdziesiątych i siedemdziesiątych triumfy święciła „nowa matematyka", w której nauczanie matematyki opierało się na języku i pojęciach wziętych z teorii mnogości i logiki formalnej. Jednym z gorących zwolenników tej metody był Zoltan Dienes – matematyk i dydaktyk zainteresowany przede wszystkim nauczaniem matematyki młodszych dzieci. W duchu nowej matematyki tworzył wiele materiałów dydaktycznych - poradników dla nauczycieli, gier, zabaw i pomocy dydaktycznych dla uczniów. Jedną z najbardziej znanych jego pomocy do pracy z dziećmi są klocki logiczne, zwane dzisiaj klockami Dienesa, o których będę mówić w swoim wystąpieniu. Gry i zabawy z klockami służyły rozwijaniu umiejętności logicznych małych dzieci. I klocki, i związane z nimi ćwiczenia zostały zapomniane wraz ze spektakularnym odwrotem od „nowej matematyki". Tymczasem, umiejętnie wykorzystane, klocki Dienesa mogą byś pomocne w rozwijaniu umiejętności rozumowania matematycznego młodszych uczniów. W swoim wystąpieniu opowiem, w jaki sposób można to robić.

Lidia ZARĘBA

Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie (Kraków)

O pewnych aspektach dotyczących stosowania wizualizacji w nauczaniu matematyki

Istotne miejsce w poznaniu matematycznym zajmuje wizualizacja. Stosowanie wizualizacji w geometrii wydaje się czymś naturalnym, tu – z uwagi na naturę tego działu matematyki – treści są często ujmowane i interpretowane na rysunkach, schematach, często z zastosowaniem programów komputerowych. W ostatnich latach w literaturze z dydaktyki matematyki jest podkreślane znaczenie reprezentacji wizualnych do wyrażania liczbowych i algebraicznych związków. W takim też kontekście przedstawiam przykłady stosowania wizualizacji w praktyce nauczania. Zwracam uwagę na pewne aspekty z tym związane: stosowanie wizualizacji w różnych matematycznych sytuacjach, korzyści i ograniczenia z niej płynące, a także trudności towarzyszące uczniom i nauczycielom podczas odwoływania się do reprezentacji wizualnych.

Mykhailo ZARICHNYI

University of Rzeszów (Rzeszów)

Max-min measures on compact spaces

The paper [1] is devoted to the theory of idempotent (max-plus) measures on compact Hausdorff spaces. The talk will concern backgrounds of the theory of max-min measures on compact space. We establish the isomorphism of the functors of max-plus and max-min measures. However, we show that the monads generated by these functors are not isomorphic. A similar result in the category of ultrametric spaces and nonexpanding maps is obtained in [2].

References

[1] M. M. Zarichnyi, *Spaces and maps of idempotent measures*, Izv. RAN. Ser. Mat. **74** (2010), 45-64.

[2] M. Cencelj, D. Repovš, M. Zarichnyi, *Max-min measures on ultrametric spaces*, Topology Appl. **160** (2013), 673-681.

Mirosława ZIMA

Uniwersytet Rzeszowski (Rzeszów)

Dodatnie rozwiązania okresowego zagadnienia brzegowego

Omówimy główne wyniki z pracy [2], uzyskane w oparciu o własności indeksu punktu stałego operatorów dodatnich względem stożka w przestrzeni Banacha, dotyczące istnienia i lokalizacji rozwiązań okresowego zagadnienia brzegowego

$$\begin{cases} x''(t) + ax'(t) = r(t)x^{\alpha}(t) - s(t)x^{\beta}(t), \quad t \in [0,T], \\ x(0) = x(T), \quad x'(0) = x'(T). \end{cases}$$

Zagadnienie to jest związane ze zjawiskiem Liebau i było ostatnio rozważane m.in. w pracach [1] oraz [3].

Literatura

[1] J. A. Cid, G. Infante, M. Tvrdý, M. Zima, *A topological approach to periodic oscillations related to the Liebau phenomenon,* J. Math. Anal. Appl. **423** (2015), 1546-1556.

[2] J. A. Cid, G. Infante, M. Tvrdý, M. Zima, *New results for the Liebau phenomenon via fixed point index*, Nonlinear Anal. RWA **35** (2017), 457-469.

[3] J. A. Cid, G. Propst, M. Tvrdý, *On the pumping effect in a pipe/tank flow configuration with friction*, Phys. D. **273-274** (2014), 28-33..

Marek Żołdak

Uniwersytet Rzeszowski (Rzeszów)

Ciągi funkcji warunkowo aproksymatywnie wypukłych

Niech D będzie niepustym podzbiorem przestrzeni unormowanej X, a $\alpha : D - D \to \mathbf{R}$ funkcją ciągłą w zerze i zerującą się w zerze. Funkcję $f : D \to \mathbf{R}$ nazywamy warunkowo α-wypukłą, jeżeli

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) + \alpha(x-y)$$

dla dowolnych $x, y \in D$ takich, że $(x+y)/2 \in D$.

Przedstawimy twierdzenie dotyczące zbieżności jednostajnej na zwartych podzbiorach dziedziny dla punktowo zbieżnego ciągu funkcji ciągłych i warunkowo α-wypukłych, określonych na otwartym i spójnym podzbiorze przestrzeni Banacha oraz twierdzenie o istnieniu podciągu zbieżnego jednostajnie na zwartych podzbiorach dziedziny dla punktowo ograniczonego ciągu funkcji ciągłych i warunkowo α-wypukłych, określonych na otwartym i spójnym podzbiorze ośrodkowej przestrzeni Banacha.

Są one odpowiednikami dobrze znanych twierdzeń dotyczących własności ciągów funkcji wypukłych określonych na zbiorach wypukłych.

Literatura

[1] J.-B. Hiriart-Urruty, C. Lemaréchal, *Convex Analysis and Minimization Algorithms I*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1996.

[2] M. Kuczma, *An Introduction to the Theory of Fuctional Equations and Inequalities*, PWN, Warszawa, 1985.

[3] M. Żołdak, *Families of conditionally approximately convex functions*, Aequat. Math. (to appear); DOI 10.1007/s00010-017-0511-x.

LISTA UCZESTNIKÓW

PIOTR ARTIEMJEW
Uniwersytet Warmińsko Mazurski w Olsztynie
artem@matman.uwm.edu.pl

NATALIA BEDNARZ
Politechnika Rzeszowska im. Ignacego Łukasiewicza
nbednarz@prz.edu.pl

PAWEŁ BEDNARZ
Politechnika Rzeszowska im. Ignacego Łukasiewicza
pbednarz@prz.edu.pl

URSZULA BENTKOWSKA
Uniwersytet Rzeszowski
ududziak@ur.edu.pl

PIOTR BŁASZCZYK
Uniwersytet Pedagogiczny im. KEN w Krakowie
pb@up.krakow.pl

DOROTA BRÓD
Politechnika Rzeszowska im. Ignacego Łukasiewicza
dorotab@prz.edu.pl

JACEK CHUDZIAK
Uniwersytet Rzeszowski
chudziak@ur.edu.pl

MAŁGORZATA CHUDZIAK
Uniwersytet Rzeszowski
mchudziak@ur.edu.pl

KINGA CUDNA
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie
kinga@matman.uwm.edu.pl

RENATA DŁUGOSZ
Politechnika Łódzka
renata.dlugosz@p.lodz.pl

STANISŁAW DOMORADZKI
Uniwersytet Rzeszowski
domoradz@ur.edu.pl

YURIJ DROBYSHEV
Financial University under the Government of the Russian Federation
matan-2015@yandex.ru

IRINA DROBYSHEVA
Financial University under the Government of the Russian Federation
drobysheva2010@yandex.ru

JANUSZ DRONKA
Politechnika Rzeszowska im. Ignacego Łukasiewicza
dronkaj@prz.edu.pl

PIOTR DRYGAŚ
Uniwersytet Rzeszowski
drygaspi@ur.edu.pl

MICHAŁ DRYGAŚ
Uniwersytet Pedagogiczny im. KEN w Krakowie
michaldq@gmail.com

PAWEŁ DRYGAŚ
Uniwersytet Rzeszowski
paweldr@ur.edu.pl

JACEK DZIOK
Uniwersytet Rzeszowski
jdziok@ur.edu.pl

MAGDALENA FIGIEL
Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie
magdalena_figiel@wp.pl

MARLENA FILA
Uniwersytet Pedagogiczny im. KEN w Krakowie
marlena-fila@wp.pl

ANNA FUTA
Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie
anna-futa@wp.pl

KATARZYNA GARWOL
Uniwersytet Rzeszowski
kgarwol@ur.edu.pl

MAREK GOLASIŃSKI
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie
marekg@matman.uwm.edu.pl

MAGDALENA GREGORCZYK
Politechnika Lubelska
m.gregorczyk@pollub.pl

PIOTR GROCHOWALSKI
Uniwersytet Rzeszowski
piotrg@ur.edu.pl

EDYTA GRUSZCZYK-KOLCZYŃSKA
Akademia Pedagogiki Specjalnej im. Marii Grzegorzewskiej w Warszawie
egruszczyk@aps.edu.pl

KATARZYNA HALIK
Uniwersytet Rzeszowski
khalik@gazeta.pl

MONIKA HOMA
Uniwersytet Rzeszowski
monikacwykiel@wp.pl

ROSTYSLAV HRYNIV
Uniwersytet Rzeszowski
rhryniv@ur.edu.pl

KATARZYNA IDZIAK
Uniwersytet Jagielloński
k.idziak@uj.edu.pl

JAN JAKÓBOWSKI
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie
jjakob@matman.uwm.edu.pl

MAREK JANASZ
Uniwersytet Pedagogiczny im. KEN w Krakowie
mjanasz@op.pl

MACIEJ JASIŃSKI
Instytut Historii Nauki im. L. i A. Birkenmajerów Polskiej Akademii Nauk
mjasinski@ihnpan.waw.pl

RENATA JURASIŃSKA
Uniwersytet Rzeszowski
rjuras@ur.edu.pl

PETRO KALENYUK
Uniwersytet Rzeszowski
pkalenyuk@gmail.com

KAROLINA KARPIŃSKA
Instytut Historii Nauki im. L. i A. Birkenmajerów Polskiej Akademii Nauk
karolinakarpinska001@gmail.com

MYROSLAVA KLAPCHUK
Lviv Polytechnic National University
m.klapchuk@gmail.com

LEOPOLD KOCZAN
Politechnika Lubelska
l.koczan@pollub.pl

LUBOV KOLYASA
Lviv Polytechnic National University
kolyasa.lubov@gmail.com

Jan Koroński
Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki
jkorons@pk.edu.pl

Anna Król
Uniwersytet Rzeszowski
annakrol@ur.edu.pl

Jacek Kucab
Uniwersytet Rzeszowski
jacek.kucab@wp.pl

Grzegorz Kuduk
Rzeszów
gkuduk@onet.eu

Piotr Lasek
Uniwersytet Rzeszowski
piotr.lasek@gmail.com

Adam Lecko
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie
alecko@matman.uwm.edu.pl

Millenia Lecko
Politechnika Rzeszowska im. Ignacego Łukasiewicza
mlecko@prz.edu.pl

Piotr Liczberski
Politechnika Łódzka
piotr.liczberski@p.lodz.pl

Violetta Lipińska
Politechnika Łódzka
violip@p.lodz.pl

Zbigniew Lipiński
Uniwersytet Opolski
zlipinski@math.uni.opole.pl

Julian Ławrynowicz
Uniwersytet Łódzki / Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk
jlawryno@uni.lodz.pl

Oleh Łopuszański
Uniwersytet Rzeszowski
olopuszanski@gmail.com

Bożena Maj-Tatsis
Uniwersytet Rzeszowski
bmaj@ur.edu.pl

SERHII MASHCHENKO
National Taras Shevchenko University of Kiev
s.o.mashchenko@gmail.com

KRZYSZTOF MAŚLANKA
Instytut Historii Nauki im. L. i A. Birkenmajerów Polskiej Akademii Nauk
krzysiek2357@gmail.com

ANDRZEJ MICHALSKI
Katolicki Uniwersytet Lubelski
amichal@kul.lublin.pl

JERZY MONTUSIEWICZ
Politechnika Lubelska
j.montusiewicz@pollub.pl

MIKHAIL MOSHKOV
King Abdullah University of Science and Technology
mikhail.moshkov@kaust.edu.sa

ZINOVII NYTREBYCH
Lviv Polytechnic National University
znytrebych@gmail.com

KAMIL ORZECHOWSKI
Uniwersytet Rzeszowski
kamil.orz@gmail.com

WIESŁAW PAJA
Uniwersytet Rzeszowski
wpaja@ur.edu.pl

KRZYSZTOF PANCERZ
Uniwersytet Rzeszowski
kpancerz@ur.edu.pl

ANTONI PARDAŁA
Wyższa Szkoła Handlowa w Radomiu
pardala@prz.edu.pl

MACIEJ PAROL
Uniwersytet Marii Curie - Skłodowskiej w Lublinie
xmaciek-parol@wp.pl

DARIUSZ PARTYKA
Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa w Chełmie
partyka@kul.lublin.pl

BARBARA PĘKALA
Uniwersytet Rzeszowski
bpekala@ur.edu.pl

KRZYSZTOF PIEJKO
Politechnika Rzeszowska im. Ignacego Łukasiewicza
piejko@prz.edu.pl

OLEKSANDR PROVOTAR
Uniwersytet Rzeszowski
aprowata1@bigmir.net

MARTA PYTLAK
Uniwersytet Rzeszowski
mpytlak@ur.edu.pl

EWA RAK
Uniwersytet Rzeszowski
ewarak@ur.edu.pl

BOŻENA ROŻEK
Uniwersytet Pedagogiczny im. KEN w Krakowie
brozek@up.krakow.pl

WOJCIECH RZĄSA
Uniwersytet Rzeszowski
wrzasa@ur.edu.pl

MIROSŁAWA SAJKA
Uniwersytet Pedagogiczny im. KEN w Krakowie
msajka@up.krakow.pl

JANUSZ SOKÓŁ
Uniwersytet Rzeszowski
jsokol@ur.edu.pl

SŁAWOMIR SOREK
Uniwersytet Rzeszowski
ssorek@ur.edu.pl

JAN STANKIEWICZ
Politechnika Rzeszowska im. Ignacego Łukasiewicza
jannstankiewicz@gmail.com

ZBIGNIEW SURAJ
Uniwersytet Rzeszowski
zbigniew.suraj@ur.edu.pl

EWA SWOBODA
Uniwersytet Rzeszowski
eswoboda@ur.edu.pl

MYKHAYLO SYMOTYUK
National Academy of Sciences of Ukraine
quaternion@ukr.net

Anna Szpila
Uniwersytet Rzeszowski
anszpila@ur.edu.pl

Katarzyna Szymańska-Dębowska
Politechnika Łódzka
katarzyna.szymanska-debowska@p.lodz.pl

Anetta Szynal-Liana
Politechnika Rzeszowska im. Ignacego Łukasiewicza
aszynal@prz.edu.pl

Wiesław Śliwa
Uniwersytet Rzeszowski
wsliwa@ur.edu.pl

Barbara Śmiarowska
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie
b.smiarowska@matman.uwm.edu.pl

Agnieszka Tanaś
Politechnika Lubelska
a.tanas@pollub.pl

Renata Tłuczek-Pięciak
Uniwersytet Rzeszowski
tluczekr@ur.edu.pl

Katarzyna Trąbka-Więcław
Politechnika Lubelska
k.trabka@pollub.pl

Lucyna Trojnar-Spelina
Politechnika Rzeszowska im. Ignacego Łukasiewicza
lspelina@prz.edu.pl

Edyta Trybucka
Uniwersytet Rzeszowski
eles@ur.edu.pl

Svitlana Vozna
Lviv Polytechnic National University
svitlanavozna@gmail.com

Bronisław Wajnryb
Politechnika Rzeszowska im. Ignacego Łukasiewicza
dwajnryb@prz.edu.pl

Maja Wenderlich
Akademia Pedagogiki Specjalnej im. Marii Grzegorzewskiej w Warszawie
maja.wenderlich@gmail.com

Marcin Wesołowski
Uniwersytet Rzeszowski
marwes@ur.edu.pl

Adam Winiarz
Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki
awiniarz@pk.edu.pl

Agnieszka Wiśniowska-Wajnryb
Politechnika Rzeszowska im. Ignacego Łukasiewicza
agawis@prz.edu.pl

Iwona Włoch
Politechnika Rzeszowska im. Ignacego Łukasiewicza
iwloch@prz.edu.pl

Anna Zając
Politechnika Gdańska
ania.zajac4@gmail.com

Józef Zając
Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa w Chełmie
jzajac@pwsz.chelm.pl

Małgorzata Zambrowska
Akademia Pedagogiki Specjalnej im. Marii Grzegorzewskiej w Warszawie
mzambrowska@aps.edu.pl

Paweł Zaprawa
Politechnika Lubelska
p.zaprawa@pollub.pl

Lidia Zaręba
Uniwersytet Pedagogiczny im. KEN w Krakowie
lzareba@up.krakow.pl

Mykhailo Zarichnyi
Uniwersytet Rzeszowski
zarichnyi@yahoo.com

Mirosława Zima
Uniwersytet Rzeszowski
mzima@ur.edu.pl

Marek Żołdak
Uniwersytet Rzeszowski
marek_z2@op.pl