THE IV CONFERENCE
OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

„CONGRESSIO-MATHEMATICA"

Mierki, 20 – 23.09.2018

Department of Complex Analysis
Faculty of Mathematics and Computer Sciences
University of Warmia and Mazury in Olsztyn
Sloneczna Street 54
10–710 Olsztyn
tel. 89 524 60 92

http://wmii.uwm.edu.pl/congressiomath

THE IV CONFERENCE
OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE
„CONGRESSIO-MATHEMATICA”

Mierki, 20 – 23.09.2018

Ministerstwo Nauki
i Szkolnictwa Wyższego

The IV Congressio-Mathematica 2018 conference is supported by the Ministry of Science and Higher Education in Poland, project no 896/P-DUN/2018

„Congressio Mathematica”

ORGANIZERS

Department of Complex Analysis
Faculty of Mathematics and Computer Sciences
University of Warmia and Mazury in Olsztyn

Faculty of Mathematics and Natural Sciences
University of Rzeszów

Faculty of Technical Physics, Information Technology and Applied Mathematics
Technical University of Lodz

Honorary Patronage of this year's conference:

the Rector
of the University of Warmia and Mazury in Olsztyn
Prof. dr hab. Ryszard GÓRECKI

the Rector
of the University of Rzeszów
Prof. dr hab. Sylwester CZOPEK

Organizing Committee

Adam Lecko - Olsztyn (chairman)
Jacek Dziok - Rzeszów (vice chairman)
Piotr Liczberski - Łódź (vice chairman)

Ihor Chyzhykov - Olsztyn
Kinga Cudna - Olsztyn
Marek Aleksiejczyk - Olsztyn
Adam Augustyniak - Olsztyn
Agnieszka Bojarska-Sokołowska - Olsztyn
Renata Długosz - Łódź
Roman Dobreńko - Olsztyn
Michał Germaniuk - Olsztyn
Piotr Jastrzębski - Olsztyn
Mikhail Kolev - Olsztyn
Bogumiła Kowalczyk - Olsztyn
Millenia Lecko - Rzeszów
Marta Pasemko - Olsztyn
Barbara Śmiarowska - Olsztyn

Scientific Committee

Józef Banaś - Rzeszów
Nak Eun Cho - Busan (Republic of Korea)
Jacek Chudziak - Rzeszów
Stanisław Domoradzki - Rzeszów
Marek Golasiński - Olsztyn
Lech Gruszecki - Chełm
Jan Jakóbowski - Olsztyn
Zbigniew J. Jakubowski - Łódź
Leopold Koczan - Lublin
Oh Sang Kwon - Busan (Republic of Korea)
Julian Ławrynowicz - Łódź
Ołeh Łopuszański - Rzeszów
Witold Łukaszewicz – Olsztyn
Marek Markowski - Olsztyn
Maria Nowak - Lublin
Dariusz Partyka - Lublin
Janusz Sokół - Rzeszów
Jan Stankiewicz - Rzeszów
Zbigniew Suraj - Rzeszów
Ewa Swoboda - Rzeszów
Jan Szynal - Lublin
Aleksy Tralle - Olsztyn
Dov Bronisław Wajnryb - Rzeszów
Józef Zając - Chełm
Eligiusz Złotkiewicz - Lublin

CONFERENCE PROGRAM

Thursday, September 20th, 2018

***

13:00 – 17:00 Lunch

***

Plenary lectures (main hall)

*Chairman: **Maria Nowak***

17:30 – 18:10 **David Shoikhet**: *Trends and Problems in Complex Dynamics and Geometric Function Theory*

18:20 – 19:00 **Miodrag Mateljević**: *Schwarz lemma and Kobayashi metrics for harmonic and holomorphic functions*

***

20:00 – 00:00 Welcome dinner

***

==

Friday, September 21th, 2018

Plenary lectures (main hall)

*Chairman: **David Shoikhet***

09:00 – 09:40 **Maria Nowak**: *On Carleson measure*

*Chairman: **Miodrag Mateljević***

09:50 – 10:30 **Janne Heittokangas**: *Nevanlinna and Valiron deficient values of solutions of linear differential equations*

10:40 – 11:20 **Jouni Rättyä**: *On Bergman projection induced by a radial weight*

*Chairman: **Stanisław Domoradzki***

11:30 – 12:10 **Piotr Błaszczyk**: *Teoria proporcji w Dioptryce Kartezjusza*

12:20 – 13:00 **Krzysztof Maślanka**: *Albert Einstein – geniusz intuicji fizycznej i pożyteczni matematycy*

***

13:00 – 14:00 Lunch

***

Chairman: ***Dov Bronisław Wajnryb***

14:10 – 14:50 **Witold Łukaszewicz**: *Belief Revision and Belief Update*

15:00 – 15:40 **Marek Golasiński**: *Smooth manifolds and their rings of smooth real functions*

Chairman: ***Jerzy Kozicki***

15:50 – 16:30 **Krzysztof Kołowrocki**: *Critical Infrastructure Safety and Resilience*

Section talks I (main hall)

Chairman: ***Witold Łukaszewicz***

16:40 –17:05 **Ivan Matychyn & Viktoriia Onyshchenko**: *Numerical Algorithms for Computation of the Matrix Mittag-Leffler Function*

17:10 – 17:35 **Ihor Chyzhykov**: *Lower order of the Cauchy-type integrals*

Chairman: ***Ihor Chyzhykov***

17:40 – 18:05 **Andriy Bandura**: *Meromorphic functions of bounded l-index*

18:10 – 18:35 **Andryi Kuryliak**: *Wiman's type inequality for multiple power series in the unbounded cylinder domain*

Chairman: ***Janusz Sokół***

18:40 – 19:20 **Tetiana Osipchuk**: *Some questions of generalized linear convexity in hypercomplex spaces*

Section talks II (turquoise hall)

Chairman: ***Krzysztof Maślanka***

16:40 – 17:10 **Stanisław Domoradzki & Małgorzata Stawiska**: *About the first years of the Polish Mathematical School on the 100th anniversary of independence*

17:15 – 17:45 **Piotr Błaszczyk**: *Negative numbers from the historical and educational perspective*

17:50 – 18:15 **Marlena Fila**: *Ciągłość w rozprawie Bernarda Bolzana (1817)*

Section talks III (turquoise hall)

Chairman: ***Piotr Błaszczyk***

18:20 – 18:40 **Renata Długosz**: *Fenomen Logistyki a matematyka*

18:45 – 19:10 **Agnieszka Bojarska-Sokołowska**: *Umiejętności geometryczne uczniów i studentów na przykładzie pozaszkolnych interaktywnych zajęć z matematyki*

19:15 – 19:40 **Barbara Dziemidowicz-Gryz**: *O identyfikowalności klas gramatyk kategorialnych o ograniczonym rzędzie*

***

20:30 – ??:?? Banquet

***

Saturday, September 22th, 2018

Plenary lectures (main hall)

Chairman: ***Janne Heittokangas***

09:00 – 09:40 **Derek K. Thomas**: *The Logarithmic Coefficients of Univalent Functions - An Overview*

09:50 – 10:30 **Derek K. Thomas, Vasudevarao Allu**: *On the Third Logarithmic Coefficient of Close-to-convex Functions*

Chairman: ***Derek K. Thomas***

10:40 – 11:20 **Rosihan M. Ali**: *Bohr inequality a century ago revisited*

Chairman: ***Julian Ławrynowicz***

11:30 – 12:10 **Józef Zając**: *Boundary normalized harmonic mappings of the unit disc with applications to aerodynamics*

12:20 – 13:00 **Dariusz Partyka**: *The Schwarz type inequalities for harmonic functions normalized on the boundary*

***

13:00 – 14:00 Lunch

***

Chairman: ***Józef Zając***

14:25 – 15:05 **Piotr Liczberski**: *Two equivalent factorization of a Bavrin's family of holomorphic functions in circulardomainsof C^n*

Chairman: ***Dariusz Partyka***

15:15 – 15:55 **Julian Ławrynowicz**: *Mathematics behind two related Nobel prizes 2016: in physics and chemistry. Reduction theorems and extension to further polymers*

Chairman: ***Marek Golasiński***

16:05 – 16:45 **Dov Bronisław Wajnryb**: *The amenability problem for discrete groups and Richard Thompson's group F*

Section talks IV (main hall)

Chairman: ***Rosihan M. Ali***

16:55 – 17:20 **See Keong Lee**: *On a generalized Bessel function*

17:25 – 17:50 **Paweł Zaprawa**: *On circularly symmetric functions*

Chairman: ***Jouni Rättyä***

17:55 – 18:35 **Renata Długosz, Agnieszka Sibelska**: *Hypergeometric functions in research of a Bavrin's family of holomorphic functions in C^n*

Chairman: ***Leopold Koczan***

18:40 – 19:05 **Agnieszka Tanaś:** *Równania ewolucyjne w skali przestrzeni Banacha*

19:10 – 19:35 **Magdalena Gregorczyk**: *Metoda Recurrence Plot i jej zastosowanie do badania zmienności nieliniowych układów dynamicznych modelowanych pochodną niecałkowitą*

Section talks V (turquoise hall)

*Chairman: **Ivan Matychyn***

16:55 – 17:20 **Jerzy Montusiewicz**: *Wykorzystanie technologii 3D w muzealnictwie*

17:25 – 17:50 **Stanisław Skulimowski**: *Metoda klasyfikacji cech homogenicznego roju robotów w funkcji warunków i celów misji*

*Chairman: **Jerzy Montusiewicz***

17:55 – 18:20 **Marcin Badurowicz**: *CRADIA: Zintegrowany system oceny jakości dróg w postaci aplikacji mobilnej*

18:25 – 18:50 **Adam Augustyniak**: *CPU and GPU String matching - in the context of dictionary attacks*

18:55 – 19:20 **Yurii Bloshko**: *Conception of Fuzzy Petri Net to Solve Transport Logistics Problems*

***

20:15 – ??:?? Barbecue

***

==

Sunday, September 23th, 2018

Plenary lectures (main hall)

*Chairman: **Krzysztof Kołowrocki***

09:00 – 09:40 **Oleksandr I. Provotar**: *Credibility of Knowledge in Fuzzy Inference Systems*

09:50 – 10:30 **Jerzy Kozicki**: *Cell division dynamics with applications to tumor growth*

*Chairman: **Piotr Liczberski***

10:40 – 11:05 **Leopold Koczan**: *Funkcje Carathéodory'ego o jednakowych początkowych współczynnikach*

11:15 – 11:45 **Young Jae Sim:** *On coefficient problems for univalent functions*

11:50 – 12:05 **Derek K. Thomas:** *Current problems in complex analysis*

12:15 – 12:55 ***Poster session***

***

13:00 – 14:00 Lunch

***

ABSTRACTS

Md Firoz ALI[1], Vasudevarao ALLU[2], Derek K. THOMAS[3]

[1] *Visvesvaraya National Institute of Technology Nagpur* (Nagpur, India)
[2] *National Institute of Technology Calicut* (Calicut, India)
[3] *Swansea University* (Swansea, United Kingdom)

On the Third Logarithmic Coefficient of Close-to-convex Functions

Let f be analytic in the unit disk $\mathbf{D} = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$, and $\mathcal{S}$ be the subclass of normalized univalent functions in $\mathbf{D}$. For the subclass of close-to-convex functions f, we discus the problem of finding the sharp bounds for the real part, and absolute value of the 3rd logarithmic coefficient γ_3 of f, where γ_n is defined by

$$\log \frac{f(z)}{z} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n z^n.$$

Rosihan M. ALI

School of Mathematical Sciences, Universiti Sains Malaysia (Penang, Malaysia)

Bohr inequality a century ago revisited

In 1914, Harald Bohr showed that $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \leq 1$ holds for $0 < r < 1/6$ whenever $|\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n| \leq 1$ in the unit disk $\mathbf{U}$ of the complex plane. The largest such radius r, known as the *Bohr radius*, has been established to be $1/3$. Thus

$$d\left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|, |a_0|\right) \leq d(f(0), \partial\mathbf{U})$$

for every analytic self-map f of the unit disk, where d is the Euclidean distance, and $|z| \leq 1/3$.

We find the Bohr radius for certain power series in $\mathbf{U}$. The Bohr radius is also studied for analytic functions from $\mathbf{U}$ into specified domains Ω, in particular, when Ω is a concave wedge-domain. The analogous Bohr radius is also studied for harmonic and log-harmonic mappings in $\mathbf{U}$.

The classical Bohr inequality is further studied in the Poincaré disk model of the hyperbolic plane. A sharp hyperbolic Bohr radius of $\tanh(1/2)/3$ is obtained for analytic self-maps of the hyperbolic unit disk. The hyperbolic Bohr radius is next investigated for the h-convex hull of a given set lying in an open half-plane of the unit disk. In this case, the sharp Bohr radius $\tanh(1/2)/3$ is also obtained.

Keywords: Bohr radius, analytic functions, harmonic functions, Poincaré metric, concave wedge-domain, hyperbolic plane.

Vasudevarao ALLU[1], Derek K. THOMAS[2]

[1] *Visvesvaraya National Institute of Technology Nagpur* (Nagpur, India)
[2] *Swansea University* (Swansea, United Kingdom))

The Logarithmic Coefficients of Univalent Functions - An Overview

Let f be analytic in the unit disk $\mathbf{D} = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ and $\mathcal{S}$ be the subclass of normalized univalent functions in $\mathbf{D}$. We give a summary of some of the significant results concerning the logarithmic coefficients γ_n of univalent functions f, defined by

$$\log \frac{f(z)}{z} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n z^n,$$

together with results for the major subclasses of $\mathcal{S}$.

Adam AUGUSTYNIAK

University of Warmia and Mazury in Olsztyn (Olsztyn)

CPU and GPU String matching - in the context of dictionary attacks

The aim of the paper is to present the topic of string matching, in the context of cracking passwords, using brute force dictionary methods, as well as presenting the possibilities offered by the use of graphics cards to speed up the calculations related to the topic. The paper consists of two parts.

In the first part, I will present basic issues, such as:

(a) The problem of string matching. What is it, as well as selected solutions to this problem - naive method, Knuth-Morris-Pratt algorithm, Boyer-Moor algorithm, Horspool algorithm. I will also explain pros and cons of these methods in the context of cracking passwords.
(b) Differences in the GPU and CPU architecture with an indication of why the use of a graphics card can be profitable.
(c) Presenting how to break passwords, overthrow the “one to one” myth.

In the second part, I will discuss an experiment about breaking the password to a protected file.

(a) Presentation of algorithms, methodologies, and equipment used in the process.
(b) Presentation and discussion about the results. Forming conclusions.

At the end of the paper, I would like to talk about improvements to the algorithms created for implementation and show the possibilities to make them more effective.

Keywords: String matching, password cracking, GPGPU.

Marcin BADUROWICZ

Politechnika Lubelska (Lublin)

CRADIA: Zintegrowany system oceny jakości dróg w postaci aplikacji mobilnej

Autorzy chcieliby zaprezentować koncepcję oraz prototypową implementację systemu CRADIA (Community Road Artefact Detection, Identification and quality Assessment) pozwalającego na detekcję, identyfikację oraz ocenę tzw. artefaktów drogowych (ubytków nawierzchni, studzienek kanalizacyjnych, progów zwalniających itp.), jak również ogólnej jakości nawierzchni drogi w sposób intuicyjny i prosty do zrozumienia dla użytkownika. System opiera się o trzy aspekty: urządzenia typu „smartphone” i odpowiednią aplikację wykorzystującą czujniki urządzenia jako dostawcę danych [1], gromadzenie danych za pomocą koncepcji aplikacji społecznościowej [3] oraz przetwarzanie strumieniowe zbudowane jako system w architekturze Lambda w środowisku chmurowym [2]. W artykule zostaną przedstawione informacje o koncepcji budowy systemu, o metodach wykrywania i analizy artefaktów drogowych oraz o metodach agregacji danych zbieranych w architekturze społecznościowej. Zostaną zaprezentowane również wyniki działania systemu w oparciu o zestaw danych testowych zgromadzonych w czasie prac nad systemem.

Literatura

[1] M. Badurowicz, J. Montusiewicz, *Identifying road artefacts with mobile devices*, Communications in Computer and Information Science, Springer, Berlin, Germany, 2015, ISSN 1865-0929, pp. 504-514.

[2] M. Badurowicz, T. Cieplak, J. Montusiewicz, *On-the-fly community-driven mobile accelerometer data analysis system for road quality assessment*, Applied Computer Science **4** (2016), 18-27.

[3] M. Badurowicz, J. Montusiewicz, T. Cieplak, *Community-Driven Road Quality Assessment for Users and Territorial Government Organizations*, Roczniki Kolegium Analiz Ekonomicznych **z. 46** (2017), 13-22.

Andriy BANDURA

Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas (Ivano-Frankivsk, Ukraine)

Meromorphic functions of bounded l-index

Let $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ be a meromorphic function of finite order. Then by Hadamard's Theorem the function f admits representation $f = f_1/f_2$, where f_1 and f_2 are entire functions from the theorem. There are known many differential equations which have only meromorphic solutions. For example, Riccati's equation, Painlevé's equations, Briot-Bouquet's equation and etc. Despite the second century of their exploration these equations are still interesting for many mathematicians. At the same time, for differential equations with entire solutions there is well developed theory of functions of bounded index. The concept has a few advantages in the comparison with traditional approaches to study the properties of entire solutions of differential equations. In particular, if an entire solution has a bounded index, then it immediately yields its growth estimates, a uniform in a some sense distribution of its zeros, a certain regular behavior of the solution, etc [1, 4].

Let $l : \mathbf{C} \to \mathbf{R}_+$ be a fixed positive continuous function, where $\mathbf{R}_+ = (0, +\infty)$. An entire function f is said to be of bounded $l-$index [3] if there exists an integer m such that for all p and all $z \in \mathbf{C}$,

$$\frac{|f^{(p)}(z)|}{l^p(z)p!} \leq \max\left\{\frac{|f^{(s)}(z)|}{l^s(z)s!} : 0 \leq s \leq m\right\}.$$

The least such integer m is called the l-index of f and is denoted by $N(f; l)$.

Here we propose the following generalization of the concept of bounded l-index. We say that a meromorphic function $f = f_1/f_2$ of finite order is of bounded l-index if the entire functions f_1 and f_2 are of bounded l-index where the functions f_1, f_2 are defined above. And the l-index of the function f is defined as $N(f, l) =$

$\max\{N(f_1;l), N(f;l_2)\}$. Let Q be a class of continuous functions $l : \mathbf{C} \to \mathbf{R}_+$ such that

$$\lambda(r) = \sup_{t_1,t_2\in\mathbf{C}} \left\{ \frac{l(t_1)}{l(t_2)} : |t_1 - t_2| < \frac{r}{\min\{l(t_1), l(t_2)\}} \right\}$$

is finite for all $r \geq 0$. Let $n\left(r, z, \frac{1}{f}\right) = \sum_{|a_k - z|<r} 1$ be a counting zero function and $n(r, z, f) = \sum_{|b_k - z|<r} 1$ be a counting pole function, where z is a fixed point, $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ is a zero sequence of the function f and $(b_k)_{k\in\mathbf{N}}$ is a pole sequence of the function f. Let us write

$$G_q(f_1) = \bigcup_n \left\{ z : |z - a_n| < \frac{q}{l(a_n)} \right\}, \quad G_q(f_2) = \bigcup_n \left\{ z : |z - b_n| < \frac{q}{l(b_n)} \right\}.$$

Denote

$$n(r, f) = \sup_{z\in\mathbf{C}} n(r, z, f), \quad n\left(r, \frac{1}{f}\right) = \sup_{z\in\mathbf{C}} n\left(r, z, \frac{1}{f}\right), \quad n(r) = \max\left\{ n(r, f), n\left(r, \frac{1}{f}\right) \right\}.$$

Theorem. *Suppose $l \in Q$, $f = f_1/f_2$ be a meromorphic function of finite order, where f_1, f_2 are defined above. If*

(1) *there exists $r_1 > 0$ such that $n(r_1) \in (0; \infty)$;*

(2) *there exist $r_2 > 0$ and $P > 0$ such that $2n(r_1)r_2 < r_1/\lambda(r_2)$ and for each $z \in \mathbf{C}\backslash G_{r_2}(f_j)$, $j \in \{1, 2\}$, the inequality*

$$\frac{|f_j'(z)|}{|f_j(z)|} \leq Pl(z)$$

holds, where r_1 is chosen from (1), then the function f has bounded l-index.

References

[1] A. Bandura, O. Skaskiv, P. Filevych, *Properties of entire solutions of some linear PDE's*, J. Appl. Math. Comput. Mech. **16** (2017), no. 2, 17-28.

[2] A. I. Bandura, *Some improvements of criteria of L-index boundedness in direction*, Mat. Stud. **47** (2017), no. 1, 27-32.

[3] A. D. Kuzyk, M. N. Sheremeta, *Entire functions of bounded l-distribution of values*, Math. Notes **39** (1986), no. 1, 3-8.

[4] M. N. Sheremeta, A. D. Kuzyk, *Logarithmic derivative and zeros of an entire function of bounded l-index*, Sib. Math. J. **33** (1992), no. 2, 304-312.

Yurii BLOSHKO[1], Oksana OLAR[1], Zbigniew SURAJ[2]

[1] *Computer Systems and Networks Department, Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University* (Chernivtsi, Ukraine)

[2] *Department of Computer Science, University of Rzeszów* (Rzeszów)

Conception of Fuzzy Petri Net to Solve Transport Logistics Problems

The present study concerns the principles of using fuzzy Petri nets to model expert knowledge by generating production rules derived from the analysis of the context of transport logistics [3]. This methodology ensured the creation of an effective mathematical model for finding an optimal set of vehicles or companies. The resulting Petri net concept associated with fuzzy logic may be useful in creating a decision-making system for a given problem.

Formalization of production rules ensures the interrelation of an object with properties and provides an opportunity for the expert in the context of transport logistics to evaluate the properties in the range [0,1].

The fuzzy Petri net models are implemented in the PNeS software [4] based on the received rules base of products. In addition to the best-performing vehicle, this model also provides the ability to compare results between different industries and make some changes if it meets the requirements. Moreover, this allows us to determine which company from the proposed list is best suited in every field of agricultural transport: auto, aircraft and rail.

This methodology is based on production rules [1], triangular rules (t-norms and s-norms) [2], fuzzy Petri net [5] to get the idea of decision-making in the transport logistics problem.

REFERENCES

[1] J. Cardoso, H. Camargo (eds.), *Fuzziness in Petri Nets*, Physica-Verlag, Heidelberg, 1999.
[2] E. P. Klement, R. Mesiar, E. Pap, *Triangular Norms*, Kluwer, Dordrecht, 2000.
[3] V. Lokazyuk, *Software for Creating Knowledge Base of Intelligent Systems of Diagnosing Process*, [in:] V. Lokazyuk, O. Olar, V. Lyaskevych (eds.), *Advanced Computer System and Networks: Design and Application: ACSN 2009*, Lviv, 2009, pp. 140-145.
[4] Z. Suraj, P. Grochowalski, *Petri Nets and PNeS in Modeling and Analysis of Concurrent Systems*, [in:] *Proc. Int. Workshop on Concurrency, Specification and Programming (CS&P 2017)*, Warsaw, Poland, September 25-27, 2017, pp. 1-12.
[5] Z. Suraj, *A New Class of Fuzzy Petri Nets for Knowledge Representation and Reasoning*, Fundamenta Informaticae **128** (2013), no. 1-2, 193-207.

PIOTR BŁASZCZYK

Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie (Kraków)

Teoria proporcji w *Dioptryce* Kartezjusza

Dioptryka, *Geometria* oraz *Meteory* stanowią eseje naukowe opublikowane przez Kartezjusza w 1637 roku pod wspólną nazwą *Rozprawa o metodzie* [4]. Istotnym motywem *Dioptryki* jest sformułowanie i uzasadnienia prawa załamania światła (współcześnie nazywanego prawem Snell'a). W referacie ukazujemy rolę antycznej teorii proporcji w wykładzie Kartezjusza oraz jej znaczenie w interpretacji prawa załamania.

LITERATURA

[1] P. Błaszczyk, K. Mrówka, *Kartezjusz, Dioptryka. Tłumaczenie i komentarz*, Universitas, Kraków, 2018.
[2] P. Błaszczyk, K. Mrówka, *Kartezjusz, Geometria. Tłumaczenie i komentarz*, Universitas, Kraków, 2015.
[3] P. Błaszczyk, K. Mrówka, *Euklides, Elementy, Księgi V-VI. Teoria proporcji i podobieństwa figur. Tłumaczenie i komentarz*, Copernicus Center Press, Kraków, 2013.
[4] R. Descartes, *Discours de la Méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences, plus la Dioptrique, les Météores et la Géométrie, qui sont des essais de cette Méthode*, Jan Maire, Lejda, 1637.

PIOTR BŁASZCZYK, MIROSŁAWA SAJKA

Pedagogical University of Cracow (Kraków)

Negative numbers from the historical and educational perspective

We identify two ways of introducing negative numbers. In the first one, a totally ordered set $(\mathbb{L}, \prec)$ is presupposed, an element 0 in L is arbitrarily taken, and a number a is negative when $a \prec 0$. In the second one, a negative number is defined by the formula $a + (-a) = 0$. From a mathematical perspective, the first method involves the idea of a totally ordered group $(\mathbb{G}, +, 0, <)$, while the second one considers the idea of the algebraic group $(\mathbb{G}, +, 0)$ alone. Through the analysis of source texts, we show that the first model originates in John Wallis' 1685 *Treatise of Algebra*, while the second one comes form the theory of polynomials, as developed by Descartes in his 1637 *La Géométrie*. In mathematical education, the first model is applied in the overwhelming majority. Still, we identify a theory that applies to the second model. We show how to develop it further and simplify the representation of the operation $a + (-a) = 0$ by turning the second model into a tablet game.

REFERENCES

[1] E. Artin, O, Schreier, *Algebraische Konstruktion reeller Körper*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität **5** (1926), 85-99.
[2] P. Błaszczyk, M. Sajka, *O liczbach ujemnych z perpektywy historycznje i dydaktycznej*, Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia **9** (2017), 5-35.

[3] R. Descartes, *Discours de la Méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences, plus la Dioptrique, les Météores et la Géométrie, qui sont des essais de cette Méthode*, Jan Maire, Lejda, 1637.
[4] J. Wallis, *Treatise of Algebra*, John Playford, London, 1685.

Agnieszka BOJARSKA-SOKOŁOWSKA

University of Warmia and Mazury in Olsztyn (Olsztyn)

Umiejętności geometryczne uczniów i studentów na przykładzie pozaszkolnych interaktywnych zajęć z matematyki

Kształceniu geometrycznemu poświęca się niewiele uwagi w edukacji wczesnoszkolnej jak również na wyższych poziomach kształcenia uczniów w szkołach polskich (podstawa programowa). Brak manipulacji, badania kształtów geometrycznych w młodszym wieku wpływa negatywnie na wyobraźnię przestrzenną uczniów i ich umiejętności rozwiązywania problemów geometrycznych. Brak wykonywania mierzenia, ważenia rożnych rzeczy w edukacji wczesnoszkolnej nie kształtuje u uczniów umiejętności szacowania wielkości bez ich pomiaru, jak również nie pomaga w abstrakcyjnym przeliczaniu jednostek. Wielu osób nie radzi sobie z podstawowymi zadaniami z geometrii przestrzennej, a zadania z geometrii w podręcznikach sprowadzone zostały do obliczeń i na te umiejętność zwracają głównie uwagę nauczyciele. Nie ma miejsca w polskiej szkole na eksperymentowanie geometryczne, na rozwijanie wyobraźni przestrzennej na twórczość i badanie obiektów geometrycznych. Tą lukę próbowałam zapełnić poprzez zorganizowanie interaktywnych zajęć geometrycznych dla gimnazjalistów i studentów edukacji wczesnoszkolnej. W wystąpieniu swoim opiszę metodologiczne podstawy przeprowadzonych zajęć oraz przeprowadzoną analizę badań, dotyczącą tego jak uczestnicy tych zajęć radzili sobie z różnymi problemami geometrycznymi.

Geometrical skills of students and students on the example of extracurricular interactive classes in mathematics

Geometric education is given little attention in early childhood education as well as at higher levels of education of students in Polish schools (core curriculum). Lack of manipulation, examination of geometric shapes at a younger age has a negative impact on the spatial imagination of students and their ability to solve geometric problems. Lack of measuring, weighing different things in early school education does not give students the ability to estimate the size without measuring them, as well as does not help in the abstract conversion of units. Many people can not cope with the basic tasks of spatial geometry, and geometry tasks in textbooks have been reduced to calculations and teachers' attention is mainly focused on these skills. There is no place in Polish school for geometrical experimentation, for developing spatial imagination for creativity regarding geometrical objects. This gap was attempted to be filled by organizing interactive geometric classes for junior high school students and early school education students. In my speech, I will describe the methodological basis of the classes and the analysis of the research carried out, concerning how the participants of these classes dealt with various geometric problems.

Igor CHYZHYKOV

University of Warmia and Mazury in Olsztyn (Olsztyn)

Lower order of the Cauchy-type integrals

We deal with following integral of Cauchy type

$$f_\alpha(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}\psi(t)}{(1 - z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})^\alpha},$$

where $\alpha > 0$, ψ is a function of bounded variation $\psi \in BV[-\pi, \pi]$, the principal branch of the power function is chosen. These functions appear frequently in representation theorems for different classes of functions defined on the unit disc $\mathbf{D} = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$.

It is known ([1]) that the logarithmic order of growth

$$p[f] = \limsup_{r\to 1^-} \frac{\log M(r, f_\alpha)}{-\log(1-r)},$$

where $M(r,f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, can be described in terms of modulus of continuity of ψ.

We find sharp estimates for the lower order

$$\lambda[f] = \liminf_{r\to 1^-} \frac{\log M(r, f_\alpha)}{-\log(1-r)}$$

in terms of modulus of continuity.

References

[1] I. Chyzhykov, *Growth and representation of analytic and harmonic functions in the unit disk*, Ukr. Math. Bull. **3** (2006), no. 1, 31-44.

Renata DŁUGOSZ

Lodz University of Technology (Łódź)

Fenomen Logistyki a matematyka

Podczas wykładu, wykorzystując statystyki dotyczące liczby kandydatów i osób przyjętych na studia stacjonarne pierwszego stopnia na Politechnikę Łódzką, odniesiemy się do faktu, że kierunek Logistyka jest jednym z najbardziej obleganych kierunków na Politechnice Łódzkiej. Rekrutacja na ten kierunek zamyka się już po pierwszym etapie. Po przeprowadzonych badaniach na grupie studentów wybranego roku na tym kierunku możemy określić, które przedmioty na tym kierunku sprawiają największą trudność i jaką pozycję wśród nich zajmuje matematyka.

Renata DŁUGOSZ[1], Piotr LICZBERSKI[1], Agnieszka SIBELSKA[2], Edyta TRYBUCKA[3]

[1] *Lodz University of Technology* (Łódź)
[2] *University of Lodz* (Łódź)
[3] *University of Rzeszów* (Rzeszów)

Hypergeometric functions in research of a Bavrin's family of holomorphic functions in $\mathbf{C}^n$

In the papers [1, 2, 3, 4, 5] were examined Bavrin's families (of holomorphic functions on bounded complete n-circular domains $\mathcal{G} \subset \mathbf{C}^n$) in which a Temljakov operator $\mathcal{L}f$ was presented as the product of a holomorphic function p with a positive real part and the $(0,k)$-symmetrical part of the function; similarly if the double operator $\mathcal{L}\mathcal{L}f$ was presented as the product of the same function $p \in \mathcal{C}_\mathcal{G}$ and $(0,2)$-symmetrical part of operator $\mathcal{L}f$ (see [6]).

These considerations can be complete by the case of the factorization $\mathcal{L}\mathcal{L}f$ by the same function p and the $(0,k)$-symmetrical part of operator $\mathcal{L}f$. During the lecture we will discuss the above case. In particular, we will give an example of hypergeometric functions belonging to such family and we will present some estimates for m-homogeneous polynomials $Q_{f,m}$ from series expansion of function f and also we will give a few relations between different Bavrin's families.

References

[1] I. I. Bavrin, *A class of regular bounded functions in the case of several complex variables and extreme problems in that class*, Moscow Oblast. Ped. Inst., Moscow, 1976.
[2] R. Długosz, P. Liczberski, *An application of hypergeometric functions to a construction in several complex variables*, J. Anal. Math. (2017), accepted.

[3] R. Długosz, E. Leś, *Embedding theorems and extreme problems for holomorphic functions on circular domains of* $\mathbb{C}^n$, Complex Var. Elliptic Equat. **59** (2014), 883-899.
[4] R. Długosz, *Embedding theorems for holomorphic functions of several complex variables*, J. Appl. Anal. **19** (2013), 153-165.
[5] R. Długosz, E. Leś, A. Sibelska, *A new inclusion for Bavrin's families of holomorphic functions in bounded comlete n-circular domains*, Math. Slovaca **66** (2016), no. 4, 1-7.
[6] A. Sibelska, *On the class NSG of the Bavrin type of holomorphic functions of several complex variables*, Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź **66** (2016), no. 3, 87-100.

Renata DŁUGOSZ[1], Piotr LICZBERSKI[1], Edyta TRYBUCKA[2]

[1] *Lodz University of Technology* (Łódź)
[2] *University of Rzeszów* (Rzeszów)

Two equivalent factorization of a Bavrin's family of holomorphic functions in circular domains of $\mathbf{C}^n$

During the lecture we will present some informations of holomorphic functions of several complex variables with two functional factorization of their Temljakov transform. In particular, we consider some families $\mathcal{K}_{\mathcal{G}}^k$, $k \geq 2$, of holomorphic functions $f : \mathcal{G} \to \mathbf{C}$, $f(0) = 1$, defined by a factorization of $\mathcal{L}f$ onto factors from $\mathcal{C}_{\mathcal{G}}$ and $\mathcal{M}_{\mathcal{G}}$. A motivation of our investigations is a condensation of some inclusions between well known families $\mathcal{C}_{\mathcal{G}}, \mathcal{M}_{\mathcal{G}}, \mathcal{N}_{\mathcal{G}}, \mathcal{R}_{\mathcal{G}}, \mathcal{V}_{\mathcal{G}}$ of such functions, by another families of similar kind. The most of presented results come from the paper [1].

References

[1] R. Długosz, P. Liczberski, E. Trybucka, *Bavrin's type factorization of the Temljakov operator for holomorphic functions in circular domains of* $\mathbb{C}^n$, Complex Analysis and Operator Theory **12** (2018), no. 5, 1321-1335.

Stanisław DOMORADZKI[1], Małgorzata STAWISKA[2]

[1] *Uniwersytet Rzeszowski* (Rzeszów)
[2] *Mathematical Reviews* (Ann Arbor, USA)

O pierwszych latach Polskiej Szkoły Matematycznej w 100. rocznicę odzyskania niepodległości
About the first years of the Polish Mathematical School on the 100th anniversary of independence

W 1915 r. front I wojny światowej przesuwał się na wschód Polski, Warszawa będąca od ponad wieku pod rządami Rosjan, znalazła się pod panowaniem Niemców. Latem 1915 r. Rosjanie ewakuowali uniwersytet carski do Rostowa n/Donem, zaś jesienią 1915 gen. Hans von Beseler utworzył polskojęzyczny Uniwersytet Warszawski i nadał mu statut. Wielu Polaków z innych zaborów i studiujących za granicą przybyło wtedy do Warszawy, m.in. z Glasgow Kazimierz Kuratowski (1896-1980). Początkowo decydującą rolę w uniwersyteckiej matematyce pełnił Stefan Mazurkiewicz (1888-1945), od 1918 r. po służbie w legionach dołączył Zygmunt Janiszewski (1888-1920). Kariera naukowa obu uczonych była związana z działalnością naukową Wacława Sierpińskiego (1882-1969) we Lwowie. Janiszewski pracował tam od 1912, nostryfikował doktorat z Sorbony i uzyskał veniam legendi (1913), Mazurkiewicz uzyskał doktorat (1913). Sierpiński w tym czasie był internowany w Rosji jako poddany Monarchii Austro-Węgierskiej, w 1918 r. został powołany na katedrę matematyki uniwersytetu w Warszawie. Temu środowisku udało się stworzyć znaną i cenioną w świecie szkołę matematyczną, której problematyka skupiona była na teorii mnogości i jej zastosowaniach. Wizję takiej szkoły wymyślił Z. Janiszewski.

The research is supported by the project The impact of WWI on the formation and transformation of the scientific life of the mathematical community (GA CR 18-00449S).

BARBARA DZIEMIDOWICZ-GRYZ

Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie (Olsztyn)

O identyfikowalności klas gramatyk kategorialnych o ograniczonym rzędzie

We wstępnej części referatu przedstawione zostaną podstawowe pojęcia związane z teorią identyfikowalności i gramatykami kategorialnymi. Teoria identyfikowalności jest działem informatyki teoretycznej (zapoczątkowanym przez Golda), który rozwinął się w oparciu o pewne wyniki lingwistyki matematycznej. Głównym zadaniem tej teorii jest próba wyjaśnienia procesu uczenia się języków, używając matematycznego modelu uczenia się. W referacie zaprezentowane zostaną wyniki dotyczące identyfikowalności klas gramatyk kategorialnych o ograniczonym rzędzie. Przedstawione zostaną następujące twierdzenia:

Twierdzenie. *Klasa gramatyk jednoznacznych o rzędzie co najwyżej n jest identyfikowalna ze struktur funktorowo-argumentowych.*

Twierdzenie. *Klasa gramatyk k-wartościowych o rzędzie co najwyżej n jest identyfikowalna ze struktur funktorowo-argumentowych.*

Twierdzenie. *Klasa będąca przecięciem klasy gramatyk optymalnych z klasą gramatyk o rzędzie co najwyżej n i klasą gramatyk k-wartościowych (o minimalnym k dla danej próbki) jest identyfikowalna ze struktur funktorowo-argumentowych.*

LITERATURA

[1] E. M. Gold, *Language identyfication in the limit*, Information and Control **10** (1967), 447-474.
[2] W. Buszkowski, G. Penn, *Categorial grammars determined from linguistic data by unification*, Studia Logica **49** (1990), 431-454.
[3] M. Kanazawa, *Learnable classes of categorial grammars*, Stanford: CSLI Publications FOLLI, (1998).
[4] B. Dziemidowicz, *Optimal unification and learning algorithms for categorial grammars*, Fundamenta Informaticae **49** (2002), 297-308.
[5] B. Dziemidowicz-Gryz, *On learnability of restricted classes of categorial grammars*, Studia Logica **85** (2007), 153-169.

JACEK DZIOK

University of Rzeszów (Rzeszów)

Dual sets for meromorphic harmonic functions

A continuous function $f = u + iv$ is a complex valued harmonic function in a domain D in the complex plane $\mathbf{C}$ if both u and v are real harmonic in D. If $\mathbf{D}$ is the exterior of the unit disc i.e., $\mathbf{D} := \{z \in \mathbf{C} : |z| > 1\}$, then we say that f is a meromorphic harmonic function. Hengartner and Schober [1] showed that a meromorphic harmonic, orientation preserving, univalent mapping f, satisfying $f(\infty) = \infty$, has to admit the representation $f(z) = h(z) + \overline{g(z)} + A \log |z|$, where $A \in \mathbf{C}$,

$$h(z) = az + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n}, \quad g(z) = bz + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n} \quad (z \in \mathbf{D},\ 0 \leq |a_0| < |b_0|),$$

and $\overline{f_{\overline{z}}}/f_z$ is analytic and bounded by 1 in $\mathbf{D}$.

Motivated by Ruscheweyh [2], we introduce the concept of dual sets for meromorphic harmonic functions. Next we show that well-known subclasses of meromorphic harmonic functions can be presented as the dual sets.

REFERENCES

[1] W. Hengartner, G. Schober, *Univalent Harmonic Functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **299** (1987), 1-31.
[2] S. Ruscheweyh, *Convolutions in geometric function theory*, Sem. Math. Sup. 83, Les Presses del'Université de Montréal, 1982.

Marlena FILA

Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie (Kraków)

Ciągłość w rozprawie Bernarda Bolzana (1817)

W 1817 roku Bernard Bolzano opublikował pracę *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetzes Resultat gewahren, wenigstens eine reelle Wurzel der gleichung liege.* Zasadniczym celem rozprawy było udowodnienie twierdzenia o zerowaniu się funkcji wielomianowej w przedziale domkniętym, gdy na końcach przedziału funkcja przyjmuje wartości różnych znaków.

W matematyce współczesnej mówi się o dwóch rodzajach ciągłości. Rozróżnia się ciągłość funkcji od ciągłości ciała liczb rzeczywistych - aksjomatu ciągłości, który jest własnością porządku. Wspomniana praca Bolzana była pierwszą, w której znajdujemy takie dwojakie rozumienie pojęcia ciągłości. Autor podaje definicję ciągłości funkcji w punkcie, a także formułuje (i udowadnia) aksjomat ciągłości.

Zreferuję rolę aksjomatu ciągłości we wspomnianej rozprawie Bolzana. Szczególną uwagę zwrócę na aksjomat Archimedesa. Omówię definicję ciągłości funkcji podaną przez Bolzana. Uzasadnię, że jest ona równoważna ze współczesną otoczeniową definicją ciągłości funkcji w punkcie.

Marek GOLASIŃSKI

University of Warmia and Mazury in Olsztyn (Olsztyn)

Smooth manifolds and their rings of smooth real functions

It is well-known that if X is a "reasonably nice" topological space (compact Hausdorff, say) then we can recover X from the ring $C(X)$ of real continuous functions on X.

Therefore, the following problem naturally arrives.

Problem. Given a smooth manifold M, write $C^\infty(M)$ for the ring of smooth real functions on M. Is the same true for a compact smooth manifold M and its ring $C^\infty(M)$ of smooth functions?

More specifically, let M and N be compact smooth manifolds.

(1) If $C^\infty(M)$ and $C^\infty(N)$ are isomorphic, then are M and N necessarily diffeomorphic?
(2) Can we recover the topological space M from $C^\infty(M)$? If so, can we also recover the smooth structure on M?

Basing on the indicated literature, we sketch proofs of the following:

Theorem 1. *A smooth manifold M is compact if and only if every maximal ideal in $C^\infty(M)$ is finitely-generated.*

Theorem 2. *Let M, N be second countable (they do not have to be compact) smooth manifolds. Then there exists a bijection:*

$$C^\infty(M, N) \longrightarrow \mathbf{Alg}_{\mathbf{R}}(C^\infty(N), C^\infty(M))$$

which is given by:
$f \mapsto (f_* : C^\infty(N) \to C^\infty(M), g \mapsto g \circ f)$, *which preserves composition.*

This yields:

Corollary 3. *There is an equivalence between the category of second countable manifolds* **Man** *and the category* $\mathbf{Alg}_{\mathbf{R}}$ *of* $\mathbf{R}$*-algebras.*

References

[1] R. V. Gamrelidze, A. A. Agrachev, S. A Vakhrameev, *Ordinary differential equations on vector bundles and chronological calculus*, J. Math. Sci. **55** (1991), no. 4, 1777-1848.
[2] J. Nestruev, *Smooth Manifolds and Observables*, Springer-Verlag, New York, 2003.

Magdalena GREGORCZYK

Politechnika Lubelska (Lublin)

Metoda Recurrence Plot i jej zastosowanie do badania zmienności nieliniowych układów dynamicznych modelowanych pochodną niecałkowitą

Od wielu lat naukowcy obserwują złożone procesy dynamiczne występujące w naturze, takie jak np.: zmiany temperatury, trzęsienia ziemi, bicia serca, fale mózgowe, zmiany prądów oceanicznych. Takie zjawiska możemy podzielić na powtarzające się i te, których częstotliwość jest nieregularna oraz opisać je matematycznie w zależności od upływającego czasu. Prowadzone badania mają na celu charakterystykę i ocenę analizowanego układu, oraz przewidywanie jego dalszej ewolucji w czasie. Dlatego też, analiza 'naturalnych' układów dynamicznych i ich modelowanie daje nam możliwość głębszego poznania otaczającej nas rzeczywistości. Powtarzalność pewnych stanów jest podstawową własnością deterministycznych układów dynamicznych i jest typowa dla układów nieliniowych i chaotycznych. Ta powtarzalność jest wizualizowana za pomocą wykresów Recurrence Plot. Metoda ta opiera się na badaniach statystycznych rozkładu pikseli graficznych na wykresie rekurencyjnym. Rzeczywiste układy dynamiczne często są lepiej opisywane równaniami różniczkowymi z pochodną ułamkową niż tradycyjnymi równaniami z pochodną rzędu całkowitego. W referacie przedstawiona zostanie zasada tworzenia wykresów rekurencyjnych, ich rodzaje oraz zastosowanie do analizy układów nieliniowych modelowanych za pomocą pochodnej ułamkowej.

Literatura

[1] C. L. Webber Jr., N. Marwan, *Recurrence Quantification Analysis, Theory and Best Practices*, Springer International Publishing, Switzerland, 2015.
[2] N. Marwan, *Encounters with neighbours - Current developments of concepts based on recurrence plots and their applications*, Universität Potsdam, Germany, May 2003.

Magdalena GREGORCZYK[1], Leopold KOCZAN[1]

[1] *Politechnika Lubelska* (Lublin)

Funkcje Carathéodory'ego o jednakowych początkowych współczynnikach

Niech Δ będzie kołem jednostkowym $\{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ oraz niech $\mathcal{P}$ będzie zbiorem wszystkich funkcji postaci

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$$

regularnych w Δ oraz takich, że dla dowolnego z należącego do koła jednostkowego Δ funkcje te spełniają warunek $\mathrm{Re}(f(z)) > 0$. Każdą funkcję z klasy $\mathcal{P}$ nazywamy funkcją o dodatniej części rzeczywistej, a klasę $\mathcal{P}$ klasą Carathéodory'ego.

Rozważamy klasę $\mathcal{Q}_n$ funkcji $p \in \mathcal{P}$ takich, że $p_1 = p_2 = \ldots = p_n$ dla $n \geq 2$ oraz współczynniki p_k dla $k = n+1, \ldots$ są dowolne i $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{P}$. Oznaczmy przez $\mathbb{A}_n$ zbiory

$$\mathbb{A}_n = \left\{a \in \mathbf{C} : p(z) = 1 + az + az^2 + \ldots + az^n + a_{n+1}z^{n+1} \ldots,\ p \in \mathcal{Q}_n\right\}.$$

W pracy przedstawiamy podstawowe własności podklasy $\mathcal{Q}_n$ funkcji Carathéodory'ego o pierwszych n jednakowych współczynnikach oraz własności zbiorów $\mathbb{A}_n$. W oparciu o twierdzenie Carathéodory'ego - Toeplitza wyznaczamy i badamy zbiory $\mathbb{A}_2$ i $\mathbb{A}_3$. Podajemy równania biegunowe brzegu tych zbiorów oraz wyznaczamy górne i dolne oszacowania $\mathrm{Re}\, a$ i $\mathrm{Im}\, a$. Ponadto szacujemy z góry i z dołu $\mathrm{Re}\, a$ w przypadku ogólnym.

Literatura

[1] A. W. Goodman, *Univalent Functions*, Mariner Pub. Co., Tampa, 1983.
[2] U. Grenander, G. Szegö, *Toeplitz Forms and Their Application*, University of Calofornia Press, Berkely, 1958.

Janne HEITTOKANGAS

University of Eastern Finland and Taiyuan University of Technology (Joensuu, Finland; Taiyuan, People's Republic of China)

Nevanlinna and Valiron deficient values of solutions of linear differential equations

A classical theorem of Wittich says that for an admissible solution f of a linear differential equation with entire coefficients the value zero is the only possible Nevanlinna deficient value. This result says nothing particular about the possible Valiron deficient values of solutions. If the assumption on admissibility is removed, we can prove that any countable set can be the set of Nevanlinna deficient values for f. Furthermore, we can prove that any uncountable set with zero capacity can be the set of Valiron deficient values for f. We also discuss two further results on deficient values of solutions, both of which associate the growth of the particular solution to the growth of the coefficients. These two results are essentially sharp in terms of growth.

This presentation is based on a joint work with Gary G. Gundersen (University of New Orleans) and Zhi-Tao Wen (Taiyuan University of Technology).

Piotr JASTRZĘBSKI

University of Warmia and Mazury in Olsztyn (Olsztyn)

Algorithmic approach to the compact Clifford-Klein forms problem

In this poster I present the algorithm for finding homogeneous spaces of semisimple non-compact Lie groups which do not admit compact Clifford-Klein forms. The calculation was made by a computer program which checks if the given homogeneous space has a non-vanishing cohomological obstruction (found by Tholozan) to compact Clifford-Klein forms.

Krzysztof KOŁOWROCKI

Gdynia Maritime University (Gdynia)

Critical Infrastructure Safety and Resilience

Comprehensive modelling of the operation process and the climate-weather change process influence on the safety of a critical infrastructure is presented. Particular models of critical infrastructure safety influenced by its inside among its assets and subsystems dependences and by its outside operating environment threats and climate-weather hazards are created. Safety and resilience indicators for a critical infrastructure are proposed and the simplified procedures of their determination in the case of the created models of critical infrastructure safety are proposed. Practical applications of the proposed models are presented as well.

Contents

1. General Approach to Critical Infrastructure Safety and Resilience Indicators
2. Critical Infrastructure Safety – Multistate Approach
3. Critical Infrastructure Safety Model – MCIS 0
4. Critical Infrastructure Safety Model Related to Its Operation Process – IMCIS 1
5. Critical Infrastructure Safety Model Related to Operation Process Including Operating Environment Threats – IMCIS 2
6. Critical Infrastructure Safety Model Related to Climate-Weather Change Process Including Extreme Weather Hazards – IMCIS 3
7. Critical Infrastructure Safety Related to Operation Process and Climate-Weather Change Process – IMCIS 4

8. Critical Infrastructure Safety Model Related to Operation Process and Climate-Weather Change Process Including Operating Environment Threats and Extreme Weather Hazards – IMCIS 5
9. Critical Infrastructure Safety Structures
10. Safety of Critical Infrastructure Network with Cascading Effect
11. Critical Infrastructure Accident Consequences
12. Applications
13. Conclusions

Bogumiła KOWALCZYK, Adam LECKO

University of Warmia and Mazury in Olsztyn (Olsztyn)

On the third Hankel determinant

Let $\mathcal{A}$ be the class of all analytic functions in the unit disk $\mathbf{D} := \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ of the form

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \quad a_1 := 1, \ z \in \mathbf{D}. \tag{1}$$

For $f \in \mathcal{A}$ of the form (1) the third Hankel determinant $H_{3,1}$ is defined as follows

$$H_{3,1}(f) := \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ a_3 & a_4 & a_5 \end{vmatrix}.$$

We present sharp estimates of $H_{3,1}$ for the class of convex functions [2], for the class of starlike functions of order 1/2 [3] and for the classes $\mathcal{T}$ and $\mathcal{T}(1/2)$ [1] of all $f \in \mathcal{A}$ such that, respectively,

$$\operatorname{Re} \frac{f(z)}{z} > 0, \quad \operatorname{Re} \frac{f(z)}{z} > \frac{1}{2}, \quad z \in \mathbf{D}.$$

References

[1] B. Kowalczyk, A. Lecko, M. Lecko, Y. J. Sim, *The sharp bound of the third Hankel determinant for some classes of analytic functions*, Bull. Korean Math. Soc., https://doi.org/10.4134/BKMS.b171122.

[2] B. Kowalczyk, A. Lecko, Y. J. Sim, *The sharp bound for the Hankel determinant of the third kind for convex functions*, Bull. Aust. Math. Soc. **97** (2018), 435-445.

[3] A. Lecko, Y. J. Sim, B. Śmiarowska, *The sharp bound of the Hankel determinant of the third kind for starlike functions of order 1/2*, Complex Analysis and Operator Theory, https://doi.org/10.1007/s11785-018-0819-0.

Jezry KOZICKI

Maria Curie-Sklodowska University (Lublin)

Cell division dynamics with applications to tumor growth

A microscopic model is proposed and analyzed in which marked point ‘particles’ perform drift in $[0, +\infty)$ with constant speed towards the origin. The position x of a given particle is interpreted as the life time of the corresponding tumor cell, whereas its mark represents phenotype. During the drift the particles are subject to random death (caused by e.g., chemotherapy). Those ones that manage to reaches the origin split into two new particles each (cell division) with random life times (cell cycles) and phenotypes, the distribution of which depends on the phenotype of the mother cell. The main question to which the presented theory gives an answer is which death rate can guarantee the extinction of the population of such particles.

Andryi KURYLIAK

Ivan Franko National University of Lviv (Lviv, Ukraine)

Wiman's type inequality for multiple power series in the unbounded cylinder domain

We prove some analogue of Wiman's inequality for analytic and random analytic functions in $\mathbf{T} = \mathbf{D}^l \times \mathbf{C}^{p-l}$, $l \in \mathbf{N},\ 1 \leq l < p$. For every $\delta > 0$ there exists a set $E = E(\delta, f) \subset [0,1)^l \times (1, +\infty)^{p-l}$ of asymptotically finite logarithmic measure such that for all $r \in \mathbf{T} \setminus E$ holds

$$M_f(r) \leq \mu_f(r) \prod_{i \in B} \frac{1}{(1-r_i)^{1+\delta}} \ln^{p/2+\delta} \left(\mu_f(r) \prod_{i \in B} \frac{1}{1-r_i} \right) \left(\prod_{j \in D} \ln r_j \right)^{p+\delta}.$$

This inequality was improved for random analytic functions in $\mathbf{T}$ and analytic functions with rapidly oscillating coefficients. Also is proved the sharpness of the obtained inequalities.

References

[1] A. Kuryliak, V. Tsvigun, *Wiman's type inequality for multiple power series in the unbounded cylinder domain*, Mat. Stud. **49** (2018), no. 1, 29-51.

Adam LECKO, Barbara ŚMIAROWSKA

University of Warmia and Mazury in Olsztyn (Olsztyn)

Classes of analytic functions connected with Blaschke products

Basing on the well known Riesz Factorization Theorem, we present the method of construction of subfamilies of the Carathéodory class of functions [1]. The basic properties of introduced classes have been proved. Next we apply this method to construct subclasses of the class of univalent functions, particularly, starlike functions [2].

References

[1] A. Lecko, B. Śmiarowska, *Classes of analytic functions related to Blaschke products*, Filomat (accepted).
[2] A. Lecko, B. Śmiarowska, *Subclasses of starlike functions related to Blaschke products*, Hacettepe J. Mathematics and Statistics (accepted).

See Keong LEE

Universiti Sains Malaysia (Penang, Malaysia)

On a generalized Bessel function

The generalized Bessel function

$${}_a\mathtt{B}_{b,p,c}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-c)^k}{k!\,\Gamma\big(ak+p+\frac{b+1}{2}\big)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p},$$

for $a \in \mathbf{N} = \{1,2,3,\ldots\}$, and $b,p,c,x \in \mathbf{R}$, is studied. Representation formulations for ${}_a\mathtt{B}_{b,p,c}$ are derived in terms of the parameters a, b and p. It is shown that the function ${}_a\mathtt{B}_{b,p,c}$ is a solution of a differential equation of order $a+1$. Monotonicity properties of ${}_a\mathtt{B}_{b,p,c}$ are also investigated for $c \leq 0$.

Julian Ławrynowicz

University of Lodz (Łódź)

Mathematics behind two related Nobel prizes 2016: physics – topology governing physics of phase transitions, chemistry – geometry of molecular nanoengines
Matematyczne koncepcje owocujące dwiema powiązanymi nagrodami Nobla 2016: z fizyki – topologia struktur fizyki przejść fazowych, z chemii – geometria molekuł jako nanomotorków

The authors describe links between topology of physics of phase transitions and geometry of molecules as nanoengines.

Research joint with Ewelina Z. Frątczak, Mariusz Zubert (Łódź), and Michel Rausch de Traubenberg (Strasbourg).

References

[1] E. Z. Frątczak, J. Ławrynowicz, M. Nowak-Kępczyk, H. M. Polatoglou, L. Wojtczak, *A theorem on generalized nonions and their properties for the applied structures in physics. Dedicated to Professor Vladimir Gutlyanskii on the occasion of his 75th birthday*, Lobatchevskii J. Math. **38** (2017), 255-261.

[2] L. N. Lipatov, M. Rausch de Traubenberg, G. G. Volkov, *On the ternary complex analysis and its applications*, J. Math. Phys. **49** (2008), 013502, 20 pp.

[3] J.-P. Sauvage, Sir J. Fraser Stoddart, B. L. Feringa, *Nobel prize lecture in chemistry 2016*, Swedish Academy of Sciences, Stockholm 2016, 12 pp.

[4] D. J. Thouless, F. D. M. Haldane, J. M. Kosterlitz, *Nobel prize lecture in physics 2016*, Swedish Academy of Sciences, Stockholm 2016, 12 pp.

Julian Ławrynowicz

University of Lodz (Łódź)

Mathematics behind two related Nobel prizes 2016: in physics and chemistry. Reduction theorems and extension to further polymers
Matematyczne koncepcje owocujące dwiema powiązanymi nagrodami Nobla 2016: z fizyki i chemii. Twierdzenia redukcyjne i rozszerzenie na dalsze polimery

As a continuation of the previous research, reduction theorems from the pair of senary and quinary structures to ternary and binary structures as well as an extension of the theory from pentacene to further polymersis studied.

References

[1] J. Ławrynowicz, *The preceding abstract.*

[2] O. Suzuki, J. Ławrynowicz, A. Niemczynowicz, M. Nowak-Kępczyk, *Fractals and chaos related to the Ising-Onsager structures. Ternary structures vs. binary structiures*, Internat. J. of Geom. Methods in Modern Phys., to appear.

Witold ŁUKASZEWICZ

University of Warmia and Mazury in Olsztyn (Olsztyn)

Belief Revision and Belief Update

Imagine an agent (a robot) equipped with a reasoning mechanism. To make inferences, the agent keeps a set of its current beliefs about the environment it operates in. In the AI literature this set is usually referred to as a *belief base* of the agent.

There are two basic situations when the agent's belief base has to be modified. Firstly, it may happen that new information becomes available. For instance, the agent may observe that there is a book on a table. Secondly, a modification may be necessary when an action has been performed. For instance, painting a red box green invalidates the belief that the block is red and introduces the belief that it is green. The above modifications of a belief base are known in the AI literature as *belief revision* and *belief update*, respectively.

In this talk I will informally present how the belief revision and belief update have been approached in Artificial Intelligence. I will also discuss certain problems that make formalization of these modifications non-trivial.

Krzysztof MAŚLANKA

Instytut Historii Nauki im. Ludwika i Aleksandra Birkenmajerów, PAN (Warszawa)

Albert Einstein – geniusz intuicji fizycznej i pożyteczni matematycy

Przez długi czas utrzymywało się przekonanie, że o ile w przypadku szczególnej teorii względności kilku fizyków (np. Lorentz) i matematyków (Poincaré) przeczuwało potrzebę radykalnych zmian w poglądach na czas i przestrzeń oraz hipotetyczny eter, w którym propaguje się światło, to w przypadku ogólnej teorii względności Einstein pracował samotnie i ukończył ją niezależnie. Pogląd taki wyraził m.in. Wolfgang Pauli. Fakt, że Einstein w swych pracach praktycznie nie cytował innych, zdawał się to potwierdzać.

Staranna analiza pokazuje jednak, że udział matematyków w rozwoju ogólnej teorii względności był dość znaczący. Można ich podzielić na cztery grupy:

– matematycy, którzy nieświadomi znaczenia swych prac dla fizyki przygotowali niezbędny język oraz formalizm dla przyszłej teorii grawitacji: Gauss, Riemann, Codazzi, Mainardi, Weingarten, Peterson, Christoffel, Ricci i in.
– matematycy współcześni Einsteinowi, którzy na różne sposoby efektywnie mu pomogli: Geiser, Grossmann, Minkowski, Pick, Levi-Civita,...
– matematycy, których ogólna teoria względności skutecznie zainspirowała przez zwrócenie uwagi na wagę koncepcji geometrycznych w fizyce: Hilbert, Weyl, É. Cartan, Gödel, Schouten, Lense,...
– matematycy, którzy po śmierci Einsteina skutecznie i twórczo rozwijali jego idee, w szczególności postawili ściśle problem warunków początkowych dla równań pola grawitacyjnego i przygotowali grunt pod intensywnie teraz rozwijane podejście numeryczne: Lichnerowicz, Choquet-Bruhat, York, Moncrief, Fischer,...

Oczywiście, nie mam zamiaru umniejszać zasług Einsteina, bez którego przenikliwej intuicji geometryczna teoria grawitacji długo jeszcze nie zostałaby sformułowana. Pozostanie ona na zawsze „największym osiągnięciem myśli ludzkiej w kwestii praw przyrody" (Max Born). Jednak faktem jest, że w trakcie długiej pracy nad tą teorią Einstein wielokrotnie błądził i potrzebował pomocy, czego najbardziej wymownych przykładem jest fragment jego listu do przyjaciela – matematyka Marcela Grossmanna: „...musisz mi pomóc, bo zwariuję!". Trzeba też podkreślić, że z upływem czasu Einstein radykalnie zmienił swój stosunek do samej matematyki – od dość lekceważącego do pełnego szacunku i pokory: „...nabrałem niezwykłego szacunku dla matematyki, której bardziej subtelne dziedziny uważałem dotychczas – w swojej naiwności – za czysty luksus!" (list do Arnolda Sommerfelda, 1912 r.).

Miodrag MATELJEVIĆ

University of Belgrade (Belgrade, Serbia)

Schwarz lemma and Kobayashi metrics for harmonic and holomorphic functions

Our lecture is related to the following.

(1) We find explicit formula for hyperbolic distance on the strip domains and using the method developed in [2, 4, 5, 1] (which we call the strip method), we give simple proofs of various versions of the planar Schwarz lemma for real valued harmonic functions and for holomorphic (more generally harmonic quasiregular, shortly HQR) mappings with the strip codomain.

(2) In addition, in [2] we mainly consider optimal versions of Schwarz lemma and its relatives related to harmonic and holomorphic functions including several variables.
In particular our considerations include domains on which we can compute Kobayashi-Finsler norm.
It turns out that our methods (results) unify very recent approaches; see the literature cited in [2].

(3) We also consider some versions of D. Khavinson extremal problem related to distortion of pluri harmonic functions.

(4) Using the obtained estimates described in the items (1), (2) and (3), we derive some corollaries related to Schwarz lemma at the boundary.

(5) For $G \subset \mathbf{C}^m$ following M. Klimek, we define the function $g_G(p, \cdot)$ (which is called the pluri-complex Green function on G), using negative plurisubharmonic functions u on G with pole at p, and define pseudo metric $C^1_{G,pls} = \exp g_G$ (shortly C^1_G) which has the decreasing property for holomorphic mappings.

(6) In addition to (5), we also prove that if G is simple-connected domain in $\mathbf{C}^m$ that C^1_G equals to Kobayashi metric.

(7) For example, in connection with the item (6), we prove if $\underline{f} : G \to \mathbf{S}^m$ is a vector valued pluriharmonic K-quasiregular function, then f is Lipschitz with respect to Kob metric on $\mathbf{S}^m$ and quasi hyperbolic distance on G with multiple constant K, and further results of this type.

References

[1] D. Kalaj, M. Vuorinen, *On harmonic functions and the Schwarz lemma*, Proc. Amer. Math. Soc. **140** (2012), no. 1, 161-165.

[2] M. Mateljević, *Schwarz lemma and Kobayashi Metrics for harmonic and holomorphic functions*, J. Math. Anal. Appl. (2018), https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.03.069.

[3] M. Mateljević, *Schwarz lemma and distortion for harmonic functions via length and area*, arXiv:1805.02979v1 [math.CV] 8 May 2018.

[4] M. Mateljević, *Geometric function theory 1* (the manuscript is on the site www.matf.bg.ac.rs/ miodrag).

[5] M. Mateljević, M. Svetlik, *Hyperbolic metric on the strip and the Schwarz lemma for HQR mappings*, arXiv:1808.06647v1 [math.CV] 20 Aug 2018, http://arxiv.org/abs/1808.06647.

Ivan MATYCHYN[1], Viktoriia ONYSHCHENKO[2]

[1] *University of Warmia and Mazury in Olsztyn* (Olsztyn)
[2] *State University of Telecommunications* (Kiev, Ukraine)

Numerical Algorithms for Computation of the Matrix Mittag-Leffler Function

A natural extension of the exponential function to the case of matrix arguments proved to be extremely useful in studying the linear systems of ordinary differential equations arising in engineering, mechanics, control theory etc. Similarly the matrix Mittag-Leffler function is crucial in linear systems of fractional differential equations, allowing to represent explicitly their solutions. That is why the methods for computing the matrix Mittag-Leffler function are so important.

There exists a wide range of algorithms for computing the matrix exponential and many of them can be adapted for computation of the matrix Mittag-Leffler function [1, 2, 3]. One of the algorithms is based on Jordan canonical form [1].

Here we provide an overview of existing numerical methods for computing of the matrix Mittag-Leffler function and discuss their applications in fractional differential equations.

References

[1] I. Matychyn, V. Onyshchenko, *Matrix Mittag-Leffler function in fractional systems and its computation*, Bull. Pol. Acad.: Tech. Sci. **64** (2018), no. 4, 495-500.

[2] I. Matychyn, V. Onyshchenko, *Optimal control of linear systems with fractional derivatives*, Fract. Calc. Appl. Anal. **21** (2018), no. 1, 134-150.

[3] R. Garrappa, M. Popolizio, *Computing the matrix Mittag-Leffler function with applications to fractional calculus*, J. Sci. Comput. **77** (2018), no. 1, 129–153

Jerzy MONTUSIEWICZ

Politechnika Lubelska, Instytut Informatyki (Lublin)

Wykorzystanie technologii 3D w muzealnictwie

Szybki rozwój technologii IT i komputerowej grafiki 3D pozwala na ich zastosowanie w wielu obszarach życia społecznego, np. w szeroko rozumianym dziedzictwie kulturowym, w tym muzealnictwie i archeologii. Dobre rozeznanie i rozumienie współczesnych technologii grafiki 3D może być wykorzystane przy rekonceptualizacji istniejących ekspozycji, aby dostosować ich atrakcyjność do oczekiwań młodzieży, a dostępność dla osób niepełnosprawnych, w tym osób niewidomych. Oczywiście zastosowanie nowych technologii informatycznych nie mogą wyeliminować tradycyjnych wystaw muzealnych. Celem zastosowań IT jest wprowadzenie atrakcyjnych ekspozycji cyfrowych dostępnych w Internecie lub na aplikacje mobilne, które można pobrać na terenie muzeum.

W referacie zaprezentowano wybrane technologie, które pozwalają aby eksponaty muzealne lub obiekty zabytkowe mogły być prezentowane jako: statyczne lub dynamiczne obiekty 3D (np. panoramy dookólne), artefakty istniejące w świecie wirtualnej rzeczywistości (VR) z dostępną interakcją lub wydrukowane kopie 3D, które można brać w ręce.

Laboratorium 'Lab 3D' Instytutu Informatyki PL posiada urządzenia skanujące 3D do małych obiektów (Artec Eva i Spider) pracujące w świetle strukturalnym z jednoczesnym pobieraniem tekstur, co pozwala na uzyskanie realistycznych wirtualnych modeli 3D do ekspozycji w VR, a także do przygotowania kopii przez druk 3D. Do skanowania 3D dużych pomieszczeń, całych budynków lub zespołów obiektów o rozmiarach do 330 m wykorzystywano laserowy skaner Faro Fokus X330. Do druku 3D wykorzystano drukarkę MarketBot Z18 pracującą w technologii FFF.

Tworzenie ekspozycji typu VR zaprezentowano na przykładzie rozwiązania nisko-kosztowego, które wymagało właściwego użycia, konfiguracji i połączenia bezpłatnego oprogramowania (3ds Max, Blender, Gimp i środowisko Unity) oraz autonomicznego wyświetlacza w postaci standardowego smartfona umieszczanego w kartonowych okularach. Wystawy dla osób niewidomych wymagają opracowania ekspozycji umożliwiających poznanie kinestetyczne. W tym celu należy zastosować metody inżynierii odwrotnej - skanowanie 3D, do pozyskania chmury punktów odzwierciedlających kształt eksponatu, następnie wykonanie „wodoszczelnego” modelu siatkowego. W kolejnym kroku trzeba przeskalować model i wprowadzić na jego powierzchnie napisy w alfabecie Braile'a, a potem wykonać rzeczywistą kopię - druk 3D. Przygotowane przykłady pochodzą z Muzeum Zamoyskich w Kozłówce, Muzeum Afrosiab w Samarkandzie, Naukowo-doświadczalnego muzeum-laboratorium SamSU (Uzbekistan) oraz z Lublina (kościół KUL i zabytkowe obiekty architektoniczne).

Literatura

[1] J. Kęsik, J. Montusiewicz, R. Kayumov, *An approach to computer-aided reconstruction of museum exhibits*, Advances in Science and Technology Research Journal, **2** (2017), 87-94.

[2] J. Montusiewicz, M. Miłosz, J. Kęsik, M. Barszcz, K. Dziedzic, M. Tokovarov, P. Kopniak, *Developing an educational board game using information technology*, EDULEARN **17**, (2017), 7396-7405.

[3] J. Montusiewicz, M. Miłosz, J. Kęsik, *Technical aspects of museum exposition for visually impaired preparation using modern 3D technologies*, EDUCON 2018, IEEE (2018), 774-779.

[4] J. Montusiewicz, M. Barszcz, S. Skulimowski, R. Kayumov, M. Buzrukov, *The concept of low-cost interactive and gamified virtual exposition*, INTED **18** (2018), 353-363.

MARIA NOWAK

Maria Curie-Sklodowska University (Lublin)

On Carleson measure

Let $\mathbf{D}$ denote the unit disk $\{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ and $\mathbf{T}$ the unit circle.
If I is an arc of $\mathbf{T}$ and $|I|$ is its arc length, the Carleson square $S(I)$ is defined as

$$S(I) = \left\{ r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} : \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \in I,\, 1 - \frac{|I|}{2\pi} \le r < 1 \right\}.$$

A positive Borel measure μ on $\mathbf{D}$ is called an s-Carleson measure, $0 < s < \infty$, if there exists a positive constant $C = C(\mu)$ such that

$$\mu(S(I)) \le C(\mu)|I|^s, \quad \text{for any arc } I \subset \mathbf{T}.$$

First, we present some equivalent characterizations of s-Carleson measures. Next, we consider the so-called balayage and B-balayage of a Borel measure μ on $\mathbf{D}$ defined by

$$S_\mu(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = \int_{\mathbf{D}} \frac{1 - |z|^2}{|1 - z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}|^2} \mathrm{d}\mu(z)$$

and

$$G_\mu(z) = \int_{\mathbf{D}} \frac{(1 - |w|^2)^2}{|1 - \bar{z}w|^4} \mathrm{d}\mu(w), \quad z \in \mathbf{D},$$

respectively; and obtain extensions of known results on these operators in the case when μ is an s-Carleson measure.

The presentation is based on a joint work with PAWEŁ SOBOLEWSKI.

TETIANA OSIPCHUK

Institute of Mathematics of NASU (Kyiv)

Some questions of generalized linear convexity in hypercomplex spaces

We consider the universal Clifford algebra $Cl_{p,q}$ over the real vector space $\mathbf{R}^n$, where $p, q \in \mathbf{Z}^+ \cup \{0\}$, $p + q = n$. The notion of linear convexity of multidimensional complex space $\mathbf{C}^n$ ([1]) is generalized on the space $Cl_{p,q}^m$ that is the Cartesian product of Clifford algebras $Cl_{p,q}$.

Definition 1. A domain $\Omega \in Cl_{p,q}^m$ is called **locally generalized linearly convex** if for every point $w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \partial\Omega$ there exists a hyperplane

$$\left\{ z = (z_1, z_2, \dots, z_m) \in Cl_{p,q}^m : \sum_{j=1}^m c_j(z_j - w_j) = 0,\ c_j \in Cl_{p,q} \right\}$$

passing through the point w and not intersecting Ω at some neighborhood of this point.

We consider domain $\Omega = \{z = (z_1, z_2, \dots, z_m) \in Cl_{p,q}^m : \rho(z) < 0\}$ with boundary $\partial\Omega = \{z : \rho(z) = 0\}$, where $\rho\colon Cl_{p,q}^m \longrightarrow \mathbf{R}$, $\rho \in C^2$ and $\operatorname{grad}\rho \ne 0$ everywhere on the boundary $\partial\Omega$. The necessary and sufficient conditions of the locally generalized linear convexity of the domain are obtained in terms of nonnegativity and positivity of some special quadratic differential forms, respectively ([4]).

These conditions are the generalization of analytical conditions of local linear convexity of domains with smooth boundary in $\mathbf{C}^n$ proposed by B. Zinoviev in 1971 ([2]) and of those in multidimensional quaternion space $\mathbf{H}^n$ ([3]).

Similar results are obtained for the case of the algebra of generalized quaternions ([6]).

The criterion of generalized linear convexity of Hartogs domains in two-dimensional quaternion space $\mathbf{H}^2$ is obtained in terms of nonnegativity of the respective differential form ([5]).

Acknowledgements. The author was supported by the grant of the President of Ukraine for competitive projects F75//30308 of the State Fund for Fundamental Research.

References

[1] L. A. Aizenberg, *Linear convexity in $\mathbb{C}^n$ and the separation of singularities of holomorphic functions*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Series Math., astr. and phys. sciences **15** (1967), no. 7, 487-495 (in Russian).
[2] B. S. Zinoviev, *Analitic conditions and some questions of approximation of linear convex domains with smooth boundaries in the space $\mathbb{C}^n$*, Izv. vuzov, Math., (1971) no. 6, 61-69 (in Russian).
[3] T. M. Osipchuk, *Analitic conditions of local linear convexity in $\mathbb{H}^n$*, Zb. prats of the Inst. of Math. of NASU **3** (2006), no. 3, 244-254 (in Ukrainian).
[4] T. M. Osipchuk, Yu. B. Zelinskii, M. V. Tkachuk, *Analytical conditions of locally general convexity in $C^m_{p,q}$*, Zb. prats of the Inst. of Math. of NASU **7** (2010), no. 2, 393-401 (in Ukrainian).
[5] T. M. Osipchuk, M. V. Tkachuk *The analytic criterion of linear convexity of the Hartogs domains with smooth boundary in $\mathbb{H}^2$*, Ukr. Math. J. **63** (2011), no. 2, 226-236 (in Ukrainian).
[6] T. M. Osipchuk, *Analytical conditions of local linear convexity in the space $\mathbb{H}^n_{\alpha,\beta}$*, Zb. prats of the Inst. of Math. of NASU **10** (2013), no. 4-5, 301-305.

Dariusz PARTYKA

The State School of Higher Education in Chełm (Chełm)
The John Paul II Catholic University of Lublin (Lublin)

The Schwarz type inequalities for harmonic functions normalized on the boundary

Given $n \in \mathbf{N}$ let $T_1, T_2, \dots, T_n$ be closed arcs contained in the unit circle $\mathbf{T} := \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$, with positive length, total length 2π and covering $\mathbf{T}$. Write $\mathcal{F}$ for the class of all complex-valued harmonic functions of the unit disk $\mathbf{D} := \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ into itself satisfying the following sectorial condition: For each $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ and for almost every $z \in T_k$ the radial limit of the function F at the point z belongs to the angular sector determined by the convex hull spanned by the origin and arc T_k. Various results involving the Schwarz type inequality for the class $\mathcal{F}$ are presented.

Krzysztof PIEJKO[1], Edyta TRYBUCKA[2], Joanna KOWALCZYK[2]

[1] *Rzeszow University of Technology* (Rzeszów)
[2] *University of Rzeszów* (Rzeszów)

Fekete-Szegö problem and Hankel determinant for certain subclass of close-to-convex functions

Let $\mathcal{K}_s(\gamma)$, $\gamma \in [0, 1)$, denote the class of all functions f analytic in the open unit disc $\mathcal{U}$ with the normalization $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ and satisfying the condition

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{-z^2 f'(z)}{g(z)g(-z)}\right\} > \gamma, \quad z \in \mathcal{U},$$

for some function g starlike of order $1/2$. For the class $\mathcal{K}_s(\gamma)$ the Fekete-Szegö problem is studied. Moreover, the sharp bound of the second Hankel determinant is found.

References

[1] J. Kowalczyk, E. Leś-Bomba, *On a subclass of close-to-convex functions*, Appl. Math. Letters **23** (2010), 1147-1151.
[2] A. Janteng, S. Halim, M. Darus, *Hankel Determinant for Starlike and Convex Functions*, Int. Journal of Math. Analysis **1** (2007), no. 13, 619-625.
[3] T. Hayami, S. Owa, *Generalized Hankel Determinant for Certain Classes*, Int. Journal of Math. Analysis **4** (2010), no. 52, 2573-2585.

Oleksandr I. PROVOTAR

University of Rzeszów (Rzeszów)

Credibility of Knowledge in Fuzzy Inference Systems

It is known that the fuzzy sets [1, 2, 3] are the convenient tool to present knowledge in information systems. Using the fuzzy sets is possible to outline, for instance, the picture of symptoms of the patient in expert diagnostics systems.

The fuzzy specification of knowledge means ordered set of fuzzy instructions. The fuzzy specifications of knowledge with the algorithm of calculating an approximate (fuzzy) solution of the problem will be called a fuzzy inference system.

The problem consist in finding the quantitative estimates of the credibility of the output knowledge in fuzzy inference system.

The proposed approach (based on fuzzy models) allows to simplify the methods of solving of above mentioned problem. But, there is a necessity for additional studies of the results of credibility. These investigations use the classical concepts of probability and fuzziness.

Fuzzy set

$$A = \{(x, \mu_A(x)),\, x \in X\}$$

in the space X will be called a fuzzy event in space X, where $\mu_A : X \to [0, 1]$ is a membership function of fuzzy set A.

A probability of fuzzy event A can be calculated according to the formula

$$P(A) = \sum \mu_A(x) P(x),$$

where $P(x)$ is a function of the probability distribution.

Conditional probability of fuzzy event A given fuzzy event B will be determined with the help of Cartesian product notion. Namely, the distribution function $P_{(A|B)}$ of the conditional probability of fuzzy event A given the fuzzy event B is determined by the distribution function $P_{(A,B)}$ of binary Cartesian product $A \times B$ probability and probability distribution function P_B of fuzzy event B, provided it is not zero, that is for any pair (x, y) of Cartesian product performed

$$Q_{(A\times B)}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{P_{(A,B)}(x, y)}{P_B(y)}, & P_B(y) \neq 0, \\ 1, & P_B(y) = 0, \end{cases}$$

$$P_{(A|B)}(x, y) = \frac{Q_{(A\times B)}(x, y)}{\sum\limits_{x,y} Q_{A\times B}(x, y)}.$$

Given this, we can calculate the conditional probability of any fuzzy events at a given probability measure.

The probability distribution function of binary Cartesian product $A \times B$ will be calculated by the formula

$$P_{(A,B)}(x, y) = \min\left(P_A(x), P_B(y)\right).$$

To calculate the credibility of the results of fuzzy inference systems, we can use the analogue of law of total probability. This law allows to evaluate the credibility of the fuzzy inference system outputs (inputs) by analogy with [4, 5].

References

[1] *Fuzzy Sets, Fuzzy Logic and Fuzzy Systems: Selected Papers by Lotfi A. Zadeh*, In (eds.): G. J. Klir, B. Yuan, Advances in Fuzzy Systems – Applications and Theory, Vol. **6**, World Scientific, Singapore, 1996.

[2] A. I. Provotar, A. V. Lapko, A. A. Provotar, *Fuzzy Inference Systems and Their Applications*, Int. Sci. J. Cybernetics and Syst. Anal. **49** (2013), no. 4, 517-525; doi: 10.1007/s10559-013-9537-9.

[3] D. Rutkowska, M. Pilinski, L. Rutkowski, *Sieci Neuronowe, Algorytmy Genetyczne i Systemy Rozmyte*, Wydawnictwo Naukove PWN, Warszava, 1997 (in Polish).

[4] J. J. Buckley, *Fuzzy Probabilities: New Approach and Applications. In: Studies in Fuzzinessand Soft Computing Springer*, Vol. **115**, Springer, Heidelberg, Germany, 2005.

[5] A. I. Provotar, A. A. Provotar, *Credibility in Fuzzy Inference Systems and Their Applications*, Int. Sci. J. Cybernetics and Syst. Anal. **53** (2017), no. 6, 866-0876; doi: 10.1007/s10559-017-9988-5.

Jouni RÄTTYÄ

University of Eastern Finland (Joensuu, Finland)

On Bergman projection induced by a radial weight

We consider the question of when the Bergman projection induced by a radial weight ω is bounded either from L^∞ to the Bloch space or on the Lebesgue space L^p_ω with $p > 1$. These questions are closely related to Littlewood-Paley estimates of Bergman space norms and doubling conditions on weights.

Nadiia SEMOCHKO

Ivan Franko National University of Lviv (Lviv, Ukraine)

On solutions of linear differential equations of arbitrary fast growth

We investigate fast growing solutions of linear differential equation

$$f^{(n)} + a_{n-1}(z)f^{(n-1)} + \dots + a_0(z)f = 0,$$

where $a_0, \dots a_{n-1}$ are entire or analytic functions in the unit disc $\mathbf{D} = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$, $n \geq 2$, $a_0 \not\equiv 0$.

For that we introduce a general scale to measure the growth of entire functions of infinite order covering arbitrary fast growth. We describe growth relations between entire coefficients and solutions of the linear differential equation in this scale. Obtained results contain those for iterated orders as a special case [1]. A generalization of Frei's theorem about number of linearly independent solutions of maximal growth is obtained as well.

Similar results are established in the unit disc case [2].

References

[1] I. E. Chyzhykov, N. S. Semochko, *Fast growing entire solutions of linear differential equations*, Mat. Visn. Nauk. Tov. Im. Shevchenka **13** (2016), 68-83.

[2] N. S. Semochko, *On solutions of linear differential equations of arbitrary fast growth in the unit disc*, Mat. Stud. **45** (2016), no. 1, 3-11.

David SHOIKHET

Holon Institute of Technology (Holon, Israel)

Trends and Problems in Complex Dynamics and Geometric Function Theory

Complex dynamical systems and nonlinear semigroup theory are not only of intrinsic interest, but are also important in the study of evolution problems. In recent years many developments have occurred, in particular, in the area of nonexpansive semigroups in Banach spaces. As a rule, such semigroups are generated by accretive operators and can be viewed as nonlinear analogs of the classical linear contraction semigroups. Another class of nonlinear semigroups consists of those semigroups generated by holomorphic mappings in complex finite and infinite dimensional spaces. Such semigroups appear in several diverse fields, including, for example, the theory of Markov stochastic branching processes, Krein spaces and the geometry of complex Banach spaces. In this talk we concentrate on trends and problems related to the nonlinear resolvent method and its connections to the classical geometric function theory.

Young Jae SIM

Kyungsung University (Busan, Republic of Korea)

On coefficient problems for univalent functions

Let $\mathcal{A}$ be the class of analytic functions in the unit disk $\mathbf{D} := \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ which have the form $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$. And let $\mathcal{S}$ be the subclass $\mathcal{A}$ consisting univalent functions. Given q, $n \in \mathbf{N}$ and $f \in \mathcal{A}$, the Hankel determinants $H_{q,n}(f)$ is defined as

$$H_{q,n}(f) := \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+q-1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{n+q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n+q-1} & a_{n+q} & \cdots & a_{n+2(q-1)} \end{vmatrix}.$$

And, given $m, n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$, the Zalcman functional $J_{n,m}(f)$ of $f \in \mathcal{A}$ is defined by

$$J_{n,m}(f) := a_{n+m-1} - a_n a_m.$$

In this talk, we discuss the sharp estimates of the second Hankel determinants such as $H_{2,1}$ and $H_{2,2}$ and the Zalcman functional $J_{2,3}$ over several subclasses of $\mathcal{S}$ such as classes of starlike functions, strongly starlike functions, or functions of bounded turning. Also, we discuss the estimates of the third Hankel determinants $H_{3,1}$ over subclasses of $\mathcal{S}$ of starlike functions or convex functions.

Stanisław SKULIMOWSKI

Politechnika Lubelska (Lublin)

Metoda klasyfikacji cech homogenicznego roju robotów w funkcji warunków i celów misji

Sukces realizacji zadań jednorodnego zbioru robotów często zależy od ich predefiniowanych cech odnoszących się do całości zbioru: prędkości przemieszczania, maksymalnego obszar skanowania, zasięgu lotu itp. Ważne są także właściwości wewnętrznych relacji, np.: zdolność do tworzenia roju, bezpieczeństwo poszczególnych robotów. Zwiększenie szans powodzenia misji zbioru robotów w sytuacji gdy jej cel i kryteria jego oceny nie są precyzyjne lub wręcz rozmyte, można uzyskać poprzez zdolność doboru jednostek znamionujących się odpowiednim zbiorem predefiniowanych cech. Taka zdolność mogłaby także pomóc w opracowaniu dokumentacji zalecanych kombinacji zbiorów robotów w zależności od rozbieżności scenariuszy zadań. Narzędzie służące do testowania doboru cech, może służyć również jako narzędzie dydaktyczne do tłumaczenia podstawowych zagadnień związanych ze sposobem przemieszczania się roju, co zostało już sprawdzone i opisane przez autorów [1] [2]. W pracy autorzy posłużyli się iteracyjną metodą wyznaczania optymalnych wartości cech roju robotów, w oparciu o zbiór wszystkich przyjętych, możliwych wartości, w celu uzyskania teoretycznie najlepszych wyników dla realizowanych zadań, takich jak transport konwojowy czy rekonesans. Stopień poprawności realizacji zadania był mierzony z użyciem autorskiej metody graficznej. W artykule zawarto opis działania metody oraz przykładowe wyniki przeprowadzonych badań numerycznych.

Literatura

[1] J. Montusiewicz, S. Skulimowski, T. Lypovyi, *Simulation of swarm behaviour as a method of examining students' capability to conduct experiments – a case study*, INTED 2017 Proceedings, ISSN 2340-1079, IATED Academy, Valencia, Spain, 2017, 8655-8664.

[2] J. Montusiewicz, S. Skulimowski, *Designing inquiry-based learning conditions within 3d-simulation environment*, EDULEARN 17 Proceedings, ISSN 2340-1117, IATED Academy, Barcelona, Spain, 2017, 10468-10477.

AGNIESZKA TANAŚ

Politechnika Lubelska (Lublin)

Równania ewolucyjne w skali przestrzeni Banacha

Omówione zostanie istnienie i jednoznaczność rozwiązania liniowego równania ewolucyjnego w skali przestrzeni Banacha. Generator równania spełnia wszystkie klasyczne założenia metody Ovsyannicova jako perturbacja generatora półgrupy C_0 działającego na każdej przestrzeni ze skali. Rozważone zostaną przykłady równań ewolucyjnych dla procesów występujących w naukach o życiu, chemii, ekologii i innych, gdzie obiektem badań są duże układy jednostek oddziałujących między sobą i ze środowiskiem. Pokazane zostanie zastosowanie metody Ovsyannicova do nieskończonego procesu fragmentacji na odpowiednich przestrzeniach ciągłych.

LITERATURA

[1] Y. Kozitsky, A. Tanaś, *Self-Regulation in Infinite Populations with Fission-Death Dynamics*, Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics **382** (2018), no. 35, 2455-2458.
[2] A. Tanaś, *A continuum individual based model of fragmentation: dynamics of correlation functions*, Annales Univ. Mariae Curie-Skłodowska, sectio A - Mathematica **69** (2015), no. 2, 73-83.

KATARZYNA TRĄBKA-WIĘCŁAW

Lublin University of Technology (Lublin)

Coefficient estimates in a certain class of analytic functions

Let $\mathcal{A}$ denote the class of functions f analytic in the open unit disc $\mathbf{D} = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ normalized by $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Moreover, let Δ_q^* be the class of functions defined by

$$\Delta_q^* = \left\{ f \in \mathcal{A} : \left| \left(\frac{z d_q f(z)}{f(z)} \right)^2 - 1 \right| < (1+q) \left| \frac{z d_q f(z)}{f(z)} \right|,\ z \in \mathbf{D} \right\},$$

where $q \in (0,1)$ and $d_q f$ is the q-derivative of f introduced by Jackson in [1, 2] as

$$d_q f(z) = \frac{f(qz) - f(z)}{qz - z}, \quad z \in \mathbf{D} \setminus \{0\} \quad \text{and} \quad d_q f(0) = f'(0).$$

This paper mainly considers the problem of determining coefficients in the class Δ_q^*.

Theorem 2. *If f given by $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$, $z \in \mathbf{D}$, belongs to Δ_q^*, then*

$$|a_2| \le \frac{1+q}{2q}, \quad |a_3| \le \frac{(1+q)(2+q)}{8q^2}, \quad |a_4| \le \frac{(1+q)^2(2+2q-q^2)}{16q^3(1+q+q^2)}.$$

Some other useful properties of this class are also considered.

This presentation is based on a joint work with RAVINDER KRISHNA RAINA (M.P. University of Agriculture and Technology, Udaipur, Rajasthan, India) and JANUSZ SOKÓŁ (University of Rzeszów, Rzeszów, Poland).

REFERENCES

[1] F.H. Jackson, *On q-functions and certain difference operator*, Trans. R. Soc. Edinb. **46** (1908), 253-281.
[2] F.H. Jackson, *On q-definite integrals*, Quart. J. Pure Appl. Math. **41** (1910), 193-203.

Lucyna TROJNAR-SPELINA

Rzeszow University of Technology (Rzeszów)

Certain subclasses of starlike functions

We consider the classes of starlike functions defined by certain differential subordination. Several mapping properties implied by conditions on $zf'(z)/f(z)$, where f in a standardly normalized analytic function in the unit disk $\mathbf{D} = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$, are investigated. Conclusions on analytic functions as consequences of main results are also presented.

The presentation is based on a joint work with Rahim KARGAR.

Bronisław WAJNRYB

Rzeszow University of Technology (Rzeszów)

Problem średniowalności dla grup dyskretnych i grupa F Richarda Thompsona

Dyskretna (przeliczalna) grupa G jest średniowalna gdy na zbiorze wszystkich podzbiorów grupy G istnieje skończona, skończenie addytywna miara niezmiennicza ze względu na przesunięcia (mnożenie przez elementy G). Zdefiniuję pojęcie grafu Cayleya dla grupy i przypomnę warunek Følnera równoważny średniowalności grupy G. Wytłumaczę kilka nowych warunków koniecznych dla średniowalności grupy o dwóch generatorach. Przypomnę definicję słynnej grupy F opisanej przez Richarda Thompsona i omówię problem średniowalności dla tej grupy.

The amenability problem for discrete groups and Richard Thompson's group F

A discrete (countable) group G is amenable if there exists a finite, finitely additive measure defined on all subsets of G and invariant with respect to translations (the multiplication by the elements of G). I shall define the notion of the Cayley graph of a group and I shall recall the Følner condition which is equivalent to the amenability of group G. I shall explain several new necessary conditions for the amenability of a group with two generators. I shall recall the definition of the famous group F defined by Richard Thompson and I shall discuss the amenability problem for this group.

Agnieszka WIŚNIOWSKA-WAJNRYB

Rzeszow University of Technology (Rzeszów)

Selected properties of k-uniformly starlike functions

Let S denote the class of all functions f that are analytic and univalent in the open unit disk $\mathbf{U} = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ and normalized by $f(0) = f'(0) - 1 = 0$.

Let $\gamma : z = z(t),\ t \in [a, b]$, be a smooth directed arc and suppose that a function f is analytic on γ. Then the arc $f(\gamma)$ is said to be starlike with respect to $w_0 \notin f(\gamma)$ if $\arg(f(z(t)) - w_0)$ is a nondecreasing function of t.

In 1991 Goodman introduced geometrically defined class UST of uniformly starlike functions. A function $f \in S$ is in the class UST if for every circular arc $\gamma \subset \mathbf{U}$ with center $\zeta \in \mathbf{U}$, the arc $f(\gamma)$ is starlike with respect to $f(\zeta)$.

In 2013 the author introduced the notion of k-uniform starlikeness which is intermediate between beeing starlike and uniformly starlike functions. Recall that a function $f \in S$ is said to be k-uniformly starlike in $\mathbf{U}$, if the image of every circular arc γ contained in $\mathbf{U}$ with center at ζ, where $|\zeta| \leq k$ $(0 \leq k \leq 1)$, is starlike with respect to $f(\zeta)$.

The aim of this note is to present selected properties of k-uniformly starlike functions.

Józef ZAJĄC

The State School of Higher Education in Chełm (Chełm)

Boundary normalized harmonic mappings of the unit disc with applications to aerodynamics

Assume that $\mathcal{H}$ is the family of all harmonic mappings of the unit disc $\mathbf{D} := \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ into itself. Motivated by the pipe gas flow problems we study some Schwarz type inequalities defined for some subclasses of the class $\mathcal{H}$ established by fixing the points $e_k := \mathrm{e}^{\frac{2\pi i k}{3}}$ for $k \in \mathbf{Z}$. Denoting by T_k the arc of the unit circle $\mathbf{T} := \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$ with length $\frac{2\pi}{3}$, joining points e_k and e_{k+1} for $k \in \{0,1,2\}$ we define the following class $\mathcal{F}$ of all $F \in \mathcal{H}$ such that

$$\lim_{r\to 1^-} F(rz) \in \operatorname{conv}(T_k \cup \{0\}), \quad \text{for a.e. } z \in T_k,\ k \in \{0,1,2\}.$$

Within this class we will determine precisely the Schwarz set

$$\mathrm{RS}_{\mathcal{F}}(\{0\}) := \bigcup_{F\in\mathcal{F}} \{F(0)\}.$$

Moreover, we consider similar problem for the class $\mathcal{F}' \subset \mathcal{H}$ of all injective mappings of $\mathbf{D}$ onto itself and satisfying the following condition

$$\lim_{r\to 1^-} F(re_k) = e_k, \quad k \in \{0,1,2\}.$$

Some applications of the obtained results will be presented in relation with aerodynamical problems of the jet engine gas flow.

Paweł ZAPRAWA

Lublin University of Technology (Lublin)

On circularly symmetric functions

Let $D \subset \mathbf{C}$ and $0 \in D$. A set D is said to be circularly symmetric if, for each $\varrho \in \mathbf{R}^+$, a set $D \cap \{\zeta \in \mathbf{C} : |\zeta| = \varrho\}$ is one of the form: an empty set, a whole circle, a curve symmetric with respect to the real axis containing ϱ. A function f analytic in the unit disk $\Delta \equiv \{\zeta \in \mathbf{C} : |\zeta| < 1\}$ and satisfying the normalization condition $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ is circularly symmetric, if $f(\Delta)$ is a circularly symmetric set. The class of all such functions is denoted by X.

We discuss various subclasses of X, among others X' or Y consisting of functions which are locally univalent or univalent, respectively. Some coefficient problems are solved. We also discuss the starlikeness, convexity and univalence for X'. Moreover, the results concerning omitted values and Koebe domains are found.

List Of Participants

Marek Aleksiejczyk
University of Warmia and Mazury in Olsztyn
maralek@matman.uwm.edu.pl

Rosihan M. Ali
Universiti Sains Malaysia
rosihan@usm.my

Adam Augustyniak
University of Warmia and Mazury in Olsztyn
adam.augustyniak@matman.uwm.edu.pl

Marcin Badurowicz
Lublin University of Technology,
m.badurowicz@pollub.pl

Andriy Bandura
Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas
andriykopanytsia@gmail.com

Eugeniusz Barcz
University of Warmia and Mazury in Olsztyn
ebarcz@matman.uwm.edu.pl

Yurii Bloshko
Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University
ubloshko@gmail.com

Piotr Błaszczyk
Pedagogical University of Cracow
pb@up.krakow.pl

Agnieszka Bojarska-Sokołowska
University of Warmia and Mazury in Olsztyn
bojarska@matman.uwm.edu.pl

Ihor Chyzhykov
University of Warmia and Mazury in Olsztyn
chyzhykov@matman.uwm.edu.pl

Renata Długosz
Lodz University of Technology
renata.dlugosz@p.lodz.pl

Stanisław Domoradzki
University of Rzeszów
domoradz@ur.edu.pl

BARBARA DZIEMIDOWICZ-GRYZ
University of Warmia and Mazury in Olsztyn
basdz@uwm.edu.pl

JACEK DZIOK
University of Rzeszów
jdziok@ur.edu.pl

BEATA FAŁDA
The State School of Higher Education in Chełm
beatafalda@gmail.com

MARLENA FILA
Pedagogical University of Cracow
marlena-fila@wp.pl

MICHAŁ GERMANIUK
University of Warmia and Mazury in Olsztyn
german@uwm.edu.pl

MAREK GOLASIŃSKI
University of Warmia and Mazury in Olsztyn
marekg@matman.uwm.edu.pl

MAGDALENA GREGORCZYK
Lublin University of Technology
m.gregorczyk@pollub.pl

LECH GRUSZECKI
The State School of Higher Education in Chełm

JANNE HEITTOKANGAS
University of Eastern Finland
janne.heittokangas@uef.fi

JAN JAKÓBOWSKI
University of Warmia and Mazury in Olsztyn
jjakob@matman.uwm.edu.pl

PIOTR JASTRZĘBSKI
University of Warmia and Mazury in Olsztyn
piojas@matman.uwm.edu.pl

LEOPOLD KOCZAN
Lublin University of Technology
l.koczan@pollub.pl

MIKHAIL KOLEV
University of Warmia and Mazury in Olsztyn
kolev@matman.uwm.edu.pl

KRZYSZTOF KOŁOWROCKI
Gdynia Maritime University
k.kolowrocki@wn.am.gdynia.pl

BOGUMIŁA KOWALCZYK
University of Warmia and Mazury in Olsztyn
b.kowalczyk@matman.uwm.edu.pl

JERZY KOZICKI
Maria Curie-Skłodowska University in Lublin
jkozi@hektor.umcs.lublin.pl

ANDRIY KURYLIAK
Ivan Franko National University of Lviv
andriykuryliak@gmail.com

ADAM LECKO
University of Warmia and Mazury in Olsztyn
alecko@matman.uwm.edu.pl

MILLENIA LECKO
Rzeszow University of Technology
mlecko@prz.edu.pl

SEE KEONG LEE
Universiti Sains Malaysia
sklee@usm.my

PIOTR LICZBERSKI
Lodz University of Technology
piotr.liczberski@p.lodz.pl

JULIAN ŁAWRYNOWICZ
University of Łódź
jlawryno@uni.lodz.pl

WITOLD ŁUKASZEWICZ
University of Warmia and Mazury in Olsztyn
witold.lukaszewicz@gmail.com

KRZYSZTOF DOMINIK MAŚLANKA
Institute for the History of Science, Polish Academy of Sciences

MIODRAG MATELJEVIĆ
University of Belgrade
miodrag@matf.bg.ac.rs

IVAN MATYCHYN
University of Warmia and Mazury in Olsztyn
matychyn@matman.uwm.edu.pl

Jerzy Montusiewicz
Lublin University of Technology
j.montusiewicz@pollub.pl

Maria Nowak
Maria Curie-Skłodowska University in Lublin
mt.nowak@poczta.umcs.lublin.pl

Viktoriia Onyshchenko
State University of Telecommunications
oviva@ukr.net

Tetiana Osipchuk
National Academy of Sciences of Ukraine
osipchuk.tania@gmail.com

Dariusz Partyka
The John Paul II Catholic University of Lublin / The State School of Higher Education in Chełm
partyka@kul.lublin.pl

Krzysztof Piejko
Rzeszow University of Technology
piejko@prz.edu.pl

Oleksandr Provotar
University of Rzeszów
aprowata1@bigmir.net

Jouni Rättyä
University of Eastern Finland
jouni.rattya@uef.fi

Nadiia Semochko
Ivan Franko Lviv National University
semochkons@ukr.net

David Shoikhet
Holon Institute of Technology
davs@braude.ac.il

Agnieszka Sibelska
University of Łódź
sibelska@math.uni.lodz.pl

Young Jae Sim
Kyungsung University
yjsim@ks.ac.kr

STANISŁAW SKULIMOWSKI
Lublin University of Technology
s.skulimowski@pollub.pl

JANUSZ SOKÓŁ
University of Rzeszów
jsokol@ur.edu.pl

AGNIESZKA TANAŚ
Lublin University of Technology
a.tanas@pollub.pl

DEREK K. THOMAS
Swansea University
d.k.thomas@swansea.ac.uk

KATARZYNA TRĄBKA-WIĘCŁAW
Lublin University of Technology
k.trabka@pollub.pl

LUCYNA TROJNAR-SPELINA
Rzeszow University of Technology
lspelina@prz.edu.pl

EDYTA TRYBUCKA
University of Rzeszów
eles@ur.edu.pl

DOV BRONISŁAW WAJNRYB
Rzeszow University of Technology
dwajnryb@prz.edu.pl

AGNIESZKA WIŚNIOWSKA-WAJNRYB
Rzeszow University of Technology
agawis@prz.edu.pl

JÓZEF ZAJĄC
The State School of Higher Education in Chełm
jzajac@pwsz.chelm.pl

PAWEŁ ZAPRAWA
Lublin University of Technology
p.zaprawa@pollub.pl