V KONFERENCJA

MATEMATYCZNO – INFORMATYCZNA

„CONGRESSIO - MATHEMATICA”

Kazimierz Dolny, 09 – 11.11.2019

V KONFERENCJA
MATEMATYCZNO – INFORMATYCZNA
„CONGRESSIO - MATHEMATICA"

Kazimierz Dolny, 09 – 11.11.2019

ORGANIZATORZY

Wydział Matematyczno – Przyrodniczy
Uniwersytet Rzeszowski

Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

Wydział Mechaniczny
Politechnika Lubelska

Wydział Fizyki Technicznej, Informatyki
i Matematyki Stosowanej
Politechnika Łódzka

Stowarzyszenie
Congressio-Mathematica

Honorowy Patronat
nad tegoroczną konferencją objęli:

JM Rektor Uniwersytetu Rzeszowskiego
prof. dr hab. Sylwester CZOPEK

JM Rektor Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego w Olsztynie
prof. dr hab. Ryszard GÓRECKI

JM Rektor Politechniki Lubelskiej
prof. dr hab. inż. Piotr KACEJKO

JM Rektor Politechniki Łódzkiej
prof. dr hab. inż. Sławomir WIAK

Komitet Organizacyjny:

Przewodniczący:
Jacek Dziok - Rzeszów
Paweł Zaprawa - Lublin

Adam Lecko - Olsztyn (z-ca)
Piotr Liczberski - Łódź (z-ca)

Sekretarz:
Katarzyna Trąbka-Więcław - Lublin

Ihor Chyzhykov - Olsztyn
Kinga Cudna - Olsztyn
Renata Długosz - Łódź
Magdalena Gregorczyk - Lublin
Piotr Jastrzębski - Olsztyn
Renata Jurasińska - Rzeszów
Mikhail Kolev - Olsztyn
Bogumiła Kowalczyk - Olsztyn
Tomasz Krajka - Lublin
Millenia Lecko - Rzeszów
Jacek Marchwicki - Olsztyn
Barbara Pękala - Rzeszów
Krzysztof Piejko - Rzeszów
Andrzej Poszwa - Olsztyn
Anna Szpila - Rzeszów
Barbara Śmiarowska - Olsztyn
Lucyna Trojnar-Spelina - Rzeszów
Edyta Trybucka - Rzeszów

Komitet Naukowo-Programowy:

Jacek Chudziak - Rzeszów
Stanisław Domoradzki - Rzeszów
Jacek Dziok - Rzeszów
Marek Golasiński - Olsztyn
Jan Jakóbowski - Olsztyn
Zbigniew J. Jakubowski - Łódź
Stanisława Kanas - Rzeszów
Leopold Koczan - Lublin
Adam Lecko - Olsztyn
Piotr Liczberski - Łódź
Julian Ławrynowicz - Łódź
Ołeh Łopuszański - Rzeszów
Witold Łukaszewicz - Olsztyn
Dariusz Partyka - Lublin
Janusz Sokół - Rzeszów
Jan Stankiewicz - Rzeszów
Zbigniew Suraj - Rzeszów
Jan Szynal - Lublin
Wiesław Śliwa - Rzeszów
Aleksy Tralle - Olsztyn
Dov Bronisław Wajnryb - Rzeszów
Józef Zając - Lublin, Chełm
Paweł Zaprawa - Lublin
Michał Zariczny - Rzeszów
Mirosława Zima - Rzeszów
Eligiusz Złotkiewicz - Lublin

Sponsorzy:

Firma OPTeam S.A.

Hotel i Restauracja "Dwa Księżyce"

Program konferencji – sekcja matematyczna
Miejsce: Hotel Dwa Księżyce (ul. Sadowa 15, Kazimierz Dolny)

Sobota, 9 listopada 2019	
12:00-15:00	Rejestracja uczestników konferencji (Hotel Dwa Księżyce)
13:00-14:15	Obiad
14:20-14:25	Otwarcie konferencji
	Sesja wykładów, przewodniczący: Józef Zając
14:25-15:10	Ołeh Łopuszański, *Weyl-Schrödinger representations of matrix Heisenberg groups in infinite dimensions*
15:10-15:25	Przerwa kawowa
	Sesja wykładów, przewodniczący: Ołeh Łopuszański
15:25-16:10	Józef Zając, *Odwzorowania harmoniczne w aerodynamice*
16:10-16:25	Przerwa kawowa
	Sesja referatów, przewodniczący: Mykhaylo Zaricznyy
16:25-16:45	Bronisław Wajnryb, *Problemy aproksymacji i wielomiany ze znikającym Hessianem*
16:45-17:05	Mirosława Zima, *Stabilność rozwiązań okresowego zagadnienia brzegowego*
18:30-21:30	Kolacja powitalna

Niedziela, 10 listopada 2019	
	Sesja wykładów, przewodniczący: Piotr Liczberski
09:30-10:15	Mykhaylo Zaricznyy, *Topology of spaces of persistence diagrams*
10:20-11:05	Julian Ławrynowicz, Małgorzata Nowak-Kępczyk, *Rola struktur binarnych i ternarnych w badaniu protein. Wprowadzenie*
11:05-11:20	Przerwa kawowa
	Sesja referatów, przewodniczący: Julian Ławrynowicz
11:20-11:40	Jacek Chudziak, *Convexity and quasi-convexity of the zero utility principle*
11:40-12:00	Wojciech Rosa, Yaroslav Chabanyuk, *Modeling electricity prices with diffusion-type process with semi-Markov switchings*

12:00-12:20	Svetlana Mincheva-Kamińska, *O istnieniu splotu ultradystrybucji typu Roumieu*
12:20-12:30	Przerwa kawowa
	Sesja referatów, przewodniczący: Adam Lecko
12:30-12:50	Piotr Błaszczyk, *On Numerosities*
12:50-13:10	Piotr Drygaś, *Rekurencyjne wyznaczanie wartości szeregów kratowych*
13:15-14:15	Obiad
14:30-17:00	Wycieczka
18:30-...	Kolacja uroczysta (bankiet konferencyjny)

Poniedziałek, 11 listopada 2019	
	Sesja wykładów, przewodniczący: Bronisław Wajnryb
09:30-10:15	Piotr Liczberski, Renata Długosz, *Jack Lemma, starlikeness and* k-*symmetry in* C^n
10:20-11:05	Dariusz Partyka, *Brzegowe charakteryzacje zespolonych funkcji quasiregularnych w kole jednostkowym*
11:05-11:20	Przerwa kawowa
	Sesja referatów, przewodniczący: Dariusz Partyka
11:20-11:40	Renata Długosz, Piotr Liczberski, Edyta Trybucka, *Majorization of the Temljakov operators for some Bavrin families in* C^n
11:40-12:00	Agnieszka Sibelska, *O kilku własnościach pewnych klas typu Bavrinowskiego funkcji holomorficznych wielu zmiennych zespolonych*
12:00-12:20	Maciej Parol, *Jednolistność pewnego operatora całkowego*
12:20-12:35	Przerwa kawowa
12:35-13.15	Sesja posterowa/ Zamknięcie konferencji
13:15-14:30	Obiad
od 14:30	Spacer na Albrechtówkę

Sesja posterowa

1. Małgorzata Chudziak, *On a disparity between willingness to pay and willingness to accept under the Rank-Dependent Utility model*

2. Paweł Drygaś, *On some generalization of ordinal sum of fuzzy implications*

3. Piotr Jastrzębski, *CAS - Computer Algebra System. How do computers help in scientific research in mathematics?*

4. Leopold Koczan, Paweł Zaprawa, *Coefficient problem for functions with positive real part and applications*

5. Mikhail Kolev, *On the application of mathematical and computational approaches in medicine*

6. Bogumiła Kowalczyk, Adam Lecko, *O współczynnikach w klasie Carathéodory'ego*

7. Jacek Kucab, *O pewnych własnościach funkcji typu Higsona kontrolowanych logarytmicznie*

8. Krzysztof Piejko, Edyta Trybucka, *Some coefficients problems for the subclass of close-to-convex functions*

9. Agnieszka Prusińska, Alexey Tretyakov, *Zagadnienia osobliwe nieliniowej optymalizacji*

10. Janusz Sokół, Mamoru Nunokawa, *On some extension of Noshiro-Warschawski's theorem*

11. Anna Szpila, *O pewnych podklasach funkcji prawie wypukłych*

12. Katarzyna Trąbka-Więcław, Paweł Zaprawa, *O funkcjonałach typu Fekete-Szegö dla funkcji prawie wypukłych*

13. Agnieszka Wiśniowska-Wajnryb, *Uniformly starlike functions and subclasses of convex functions*

Sekcja historii/dydaktyki matematyki
Miejsce: Dom Wypoczynkowy Politechniki Lubelskiej
(ul. Kwaskowa Góra 2b, Kazimierz Dolny)

Sobota, 9 listopada 2019	
	Sesja referatów, przewodniczący: Stanisław Domoradzki
11:30-12:00	Wiesław Wójcik, *Programy badawcze Hugona Steinhausa i ich realizacja*
12:00-12:30	Stanisław Domoradzki, Małgorzata Stawiska, Mykhailo Zarichnyy, *Matematyka we Lwowie w okresie międzywojennym i jej różne oblicza*
12:30-13:00	Piotr Błaszczyk, *Where mathematical proof comes from?*
13:00-13:30	Marlena Fila, *Definitions of continuous function from Bolzano to Russell*
13:30-15:00	Przerwa obiadowa
	Sesja referatów, przewodniczący: Wiesław Wójcik
15:00-15:30	Piotr Błaszczyk, *Euclid's theory of equal figures and methodology of mathematics*
15:30-16:00	Maja Wenderlich-Pintal, *Kamienie milowe w biegu życia wybitnych matematyków i uzdolnionej matematycznie młodzieży*
16:00-16:30	Marlena Fila, *Błędne koło w Rein analytischer Beweis Bernarda Bolzano*
16:30-17:00	Agnieszka Bojarska-Sokołowska, *Interaktywne matematyczne nauczanie dzieci i młodzieży*
17:00-17:30	Anna Petiurenko, *Metoda Pola, jako nowa metoda nauczania geometrii*
17:30-18:00	Sylwia Kania, *Metody aktywizujące z wykorzystaniem TIK*

Sekcja informatyczna
Miejsce: Dom Wypoczynkowy Politechniki Lubelskiej
(ul. Kwaskowa Góra 2b, Kazimierz Dolny)

Niedziela, 10 listopada 2019	
	Sesja referatów, przewodniczący: Zbigniew Suraj
9:30-9:50	Oleksandr Provotar, *About calculating fuzzy probabilities of fuzzy events*
9:55-10:15	Yaroslav Chabanyuk, Uliana Khimka, *Application of the stochastic approximation procedure*
10:20-10:40	Barbara Pękala, *Atanassov intuitionistic fuzzy setting and quivalence measures used to algorithm of image processing*
10:45-11:05	Stanisław Skulimowski, Marcin Badurowicz, Marcin Barszcz, Jerzy Montusiewicz, *Projektowanie i optymalizacja interaktywnej wizualizacji wirtualnej rzeczywistości*
11:05-11:30	Przerwa kawowa
	Sesja referatów, przewodniczący: Oleksandr Provotar
11:30-11:55	Antoni Pardała, *Priorytety informatyzacji kształcenia* matematycznego *– a praktyka, wyzwania i zagraniczne tendencje*
12:00-12:20	Zbigniew Suraj, Piotr Grochowalski, *On Pawlak's numbers and collaboration graph*
12:25-12:45	Zbigniew Suraj, Oksana Olar, Yurii Bloshko, *Hierarchical fuzzy Petri nets for solving passenger transport logistics problem*
12:50-13:10	Marcin Barszcz, Jerzy Montusiewicz, Krzysztof Dziedzic, *Metodyka cyfrowej rekonstrukcji uszkodzonych naczyń z wykopalisk archeologicznych*

ABSTRAKTY

Piotr BŁASZCZYK

Institute of Mathematics, Pedagogical University of Krakow (Kraków)

Euclid's Theory of Equal Figures and Methodology of Mathematics

In teachers' training, elementary geometry is a way of introducing the methodology of mathematics to students, specifically theorem proving. While the mathematics used in the course is simple, a lecturer, i.e. a teacher of prospective teachers, can focus on the relationship between the premises and conclusions; he can point out references to the axioms and previously proved theorems; he can also highlight the use of undefined terms, and explain the difference between direct and indirect proof. By and large, Euclidean geometry is presented from the perspective of the 20^{th} century philosophy of mathematics as a set of sentences that follow from axioms.

We offer an alternative view on mathematical theory, namely: Theory is a hierarchical structure of theorems designed to solve a specific problem and characterized by having the same methodology. We accept the general idea of the deductive nature of mathematics, however, in this context, by methodology we mean a set of so-called mathematical tricks irreducible to logical consequence. To illustrate this new perspective, we present two theories identified in Euclid's *Elements*: Theory of Area and Theory of Similar Figures. We present them as hierarchical systems crowned by proposition II.14 in the case of the former theory, and VI.31 in the case of the later. We also reveal a technique of triangulation, and show that it enables to reduce problems concerning polygons to triangles; this technique is covered neither by modern axiomatic analyses of elementary geometry nor by the mathematics curriculum.

We offer diagrams representing the triangulation method as it relates to the Pythagorean theorem. We show that depending on whether the triangulation is applied within the Theory of Area or the Theory of Similar it gives different proofs of the Pythagorean theorem, namely I.47 and VI.31 respectively.

References

[1] P. Błaszczyk, *From Euclid's Elements to the Methodology of Mathematics*, Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia **X** (2018), 5–15.

Piotr BŁASZCZYK

Institute of Mathematics, Pedagogical University of Krakow (Kraków)

Where Mathematical Proof Comes From?

1. Modern logic emerged from the reform of Aristotle's syllogisms through algebra and other techniques of symbolic manipulation. It was also shaped by the 19th century developments of mathematics, specifically the foundations of geometry, the search for rigor in the calculus, and the axiomatization of set theory. By mathematical logic (ML) we mean the branch of logic that has arisen from foundational studies in mathematics.

ML developed two models of mathematical proof (MP):

(1) sequence of formulae $F_1, \ldots, F_n$, where F_k is either an axiom or is obtained from the previous formulae F_i, F_j by the *modus ponens* rule, see [1],

(2) twofold composition that includes, on the one hand, a sequence of formulae, and on the other, a sequence of signs explaining the status of each formula in the first sequence in terms of axioms, definitions, and references to other theorems or formulae, see [2],[3].

While the first model is rather speculative, it gave rise to a branch of ML called proof theory; the second model seems to emulate mathematical practice.

In this talk, we focus on the historical roots of MP and show their Euclid origins. More precisely, we show how editions and commentaries on *The Elements*, starting with the Late Renaissance and Early Modern ones, via the Peano *Formulario Mathematico* program, have paved the way to the second model of MP.

2. There are two components of Euclid's proposition: the text and the lettered diagram. Latin tradition, beside extensive commentaries, has introduced a third part into Euclid's proposition, namely marginalia, containing references to definitions, axioms and other propositions. Next to marginalia, the tradition of commentaries introduced yet another part into Euclid's proposition: symbols representing some notions and relations; these symbols were included in the linear structure of the text simply in the place of words.

Peano has introduced a technique of purely symbolic representation of Euclid's propositions.He has followed the same technique of symbolic representation in the foundations of calculus and geometry. Still, his symbolic propositions, next to a sequence of formulae, have included a system of references. Peano's technique of symbolic representation of mathematical sentences has been adopted in [3], and due to the great influence of *Prinicipa Mathematica* on logic, it has become a standard model of MP

References

[1] D. Hilbert, *Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteillung*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität **1** (1922), 157–177.

[2] G. Peano, *Opere Scelte*, vol. I–III, Roma, 1956.

[3] B. Russell, A. Whitehead, *Principia Mathematica*, Cambridge, 1910–1913.

Piotr BŁASZCZYK

Institute of Mathematics, The Pedagogical University of Krakow (Kraków)

On Numerosities

Benci and Di Nasso [1] introduced a new kind of infinite numbers, called by them *numerosities*, designed to measure countable sets in such a way that $numnerosity(A) < numerosity(B)$, whenever $A \subset B$. We present a simplified version of the theory that applies to subsets of $\mathbf{N}$. To this end, we extend the system of natural numbers $(\mathbf{N}, +, \cdot, 0, 1, <)$ to the system of nonstandard natural numbers $(\mathbf{N}^*, +, \cdot, 0, 1, <)$ and represent numerosities as elements of $\mathbf{N}^*$. To demonstrate how *numerosities* differ from the Cantorian cardinal numbers, we show that numerosity of $\mathbf{N}$ is twice as big as the numerosity of the set of even numbers.

References

[1] V. Benci, Di Nasso, *How to Measure the Infinite: Mathematics with Infinite and Infinitesimal Numbers*, World Scientific, Singapore, 2019.

Agnieszka BOJARSKA-SOKOŁOWSKA

Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie (Olsztyn)

Interaktywne matematyczne nauczanie dzieci i młodzieży

„Interaktywność" (z łacińskiego „interactus" -czyn wzajemny) jest to „zdolność do wzajemnego oddziaływania na siebie przez komunikujące się strony". W słowie tym zawarte są dwa elementy: aktywność i współpraca/komunikacja. Ma to związek z dwoma aspektami. Pierwszy z nich dotyczy aktywnej koncepcji uczenia (H. Aeblie), czyli aktywności badawczej uczącego się i konstruującego wiedzę ucznia. Drugi aspekt dotyczy komunikowania się „uczący się, wchodząc we wzajemne interakcje, intensyfikują procesy poznawcze, a wiek w tym przypadku nie gra roli". Jolanta Kruk zwraca uwagę, na fakt, że nie należy ograniczać interaktywności jedynie do relacji z drugim człowiekiem, ale należy również uwzględniać relację człowieka z przedmiotem. Badaczka definiuje interaktywność w edukacji „jako taką relację z przedmiotem uwagi, w trakcie której dochodzi do ukształtowania go jako przedmiotu percepcji o rozszerzonym znaczeniu - w miarę postępowania procesu interakcji". Koncepcja interaktywnego sposobu nauczania-uczenia się narodziła się w muzeach, centrach nauki; które dostosowując się do dzisiejszego odbiorcy musiały przekształcić się z placówek pełniących wyłącznie funkcje kolekcjonerską w instytucje edukacyjne i umożliwiające eksperymentowanie- „Nie przyglądaj się, ingeruj!"- słowa I. Hackinga.

W swoim wystąpieniu omówię koncepcję interaktywnego nauczania-uczenia się matematyki zaproponowaną przez Jolantę Kruk. Przedstawię wyniki prowadzonych przeze mnie badań, prowadzonych w latach 2008-2018. Ich celem było z jednej strony opisanie obiektów matematycznych znajdujących się w muzeach, centrach nauki oraz na wystawach interaktywnych, z drugiej strony zaś analiza zachowania dzieci i młodzież podczas pozaszkolnych interaktywnych zajęć matematycznych.

Literatura

[1] A. Bojarska-Sokołowska, *Pozaszkolne formy edukacji matematycznej. Popularyzacja matematyki, interaktywność w kształceniu, kultura matematyczna*, Wydawnictwo UWM, Olsztyn, 2019.

[2] G. Karwasz, J. Kruk, *Idee i realizacje dydaktyki interaktywnej-wystawy, muzea i centra nauki*, Wydawnictwo Naukowe UMK, Toruń, 2012.

Yaroslav CHABANYUK[1], Uliana KHIMKA[2]

[1,2]*Lublin University of Technology* (Lublin)
[2]*Ivan Franko National University of Lviv* (Lviv, Ukraine)

Application of the stochastic approximation procedure

We will present the properties of a continuous and discrete stochastic approximation procedure with Markov and semi-Markov switches [1, 2]. Next we will show the application of such a procedure in the model of bacterial development, the solution of the Markowitz problem, as well as in modeling the process of testing a software product. We emphasize the possibility of applications in control theory [3] and large deviation theory [4].

References

[1] Ya. M. Chabanyuk, *Continuous stochastic approximation with semi-Markov switchings in the diffusion approximation scheme*, Cybernetics and Systems Analysis **43** (2007), no. 4, 605–612.

[2] A. Kinash, Ya. Chabanyuk, U. Khimka, *Asymptotic dissipativity of the diffusion process in the asymptotic small diffusion scheme*, Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics **14** (2015), no. 4, 93–103.
[3] A. V. Nikitin, U. T. Khimka, *Asymptotics of normalized control with Markov switchings*, Ukrainian Mathematical Journal **68** (2017), no. 8, 1252–1262.
[4] V. S. Korolyuk, *Problem of large deviations for Markov random evolutions with independent increments in the scheme of asymptotically small diffusion*, Ukrainian Mathematical Journal **62** (2010), no. 5, 739–747.

Jacek CHUDZIAK

University of Rzeszów (Rzeszów)

Convexity and quasi-convexity of the zero utility principle

Assume that $\mathcal{X}_+$ is a family of all non-negative bounded random variables on a given probability space. The elements of $\mathcal{X}_+$ represent the risks to be insured by an insurance company. According to each insurance contract, the insured pays a premium for a protection from an insurance company against an insurable risk. An insurance premium principle is a way of assigning to every risk a non-negative real number, interpreted as a premium for insuring the risk. There are several methods of determining the premium. One of them is is *the zero utility principle.* belonging to the economic methods of insurance contracts pricing. The principle, proposed by Bühlmann [2], involves the notion of a utility function and postulates a fairness in terms of utility. This means that the premium is defined in such a way that the insurance company is indifferent between rejecting the contract and entering into it.

In this setting a premium for a risk $X \in \mathcal{X}_+$ is defined as a real number $H_u(X)$ satisfying equation

$$E[u(w + H(X) - X)] = 0 \tag{1}$$

where $u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ is a strictly increasing continuous function with $u(0) = 0$. It turns out that, for every $X \in \mathcal{X}_+$, such a number $H_u(X)$ exists and it is unique. Therefore equation (1) determines in an implicit way a functional $H_u : \mathcal{X}_+ \to \mathbf{R}$.

Several results concerning properties of the functional H_u can be found e.g., in [1, 2, 3] and [6]. It is known that, for every strictly increasing continuous function $u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ satisfying $u(0) = 0$, H_u is monotone and conditionally translation invariant. However, in general, it is not convex. In this talk we present a characterization of convexity and quasi-convexity of H_u. A fundamental role in our investigations is played by *quasideviation means* (cf. [4, 5]).

References

[1] N. L. Bowers, H. U. Gerber, J. C. Hickman, D. A. Jones, C. J. Nesbitt, *Actuarial Mathematics*, The Society of Actuaries, Itasca, Illinois, 1986.
[2] H. Bühlmann, *Mathematical Models in Risk Theory*, Springer, Berlin, 1970.
[3] H. U. Gerber, *An Introduction to Mathematical Risk Theory*, S. S. Huebner Foundation, R. D. Irwin Inc., Homewood Illinois, 1979.
[4] Zs. Páles, *Characterization of quasideviation means*, Acta. Math. Sci. Hungar. **40** (1982), 243–260.
[5] Zs. Páles, *General inequalities for quasideviation means*, Aequationes Math. **36** (1988), 32–56.
[6] T. Rolski, H. Schmidli, V. Schmidt, J. Teugels, *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, John Wiley & Sons, New York, 1999.

Małgorzata CHUDZIAK

University of Rzeszów (Rzeszów)

On a disparity between willingness to pay and willingness to accept under the Rank-Dependent Utility model

Let $\mathcal{X}$ be a family of lotteries, that is finitely-supported probability distributions on $\mathbf{R}$. The lottery pricing problem is an important issue in many models of decision making under risk. It consists on assigning to each lottery a real number, interpreted as a price for the lottery. In experimental settings, it has been observed that the price of a given lottery depends on whether a decision maker intends to buy or sell it. Therefore in many models a buying price and a selling price for a given lottery are defined in different ways. A buying price of $X \in \mathcal{X}$ is the highest amount an individual is willing to pay for X. A selling price of $X \in \mathcal{X}$ is the smallest amount for which an individual would accept the sell of X. There are several ways of defining the buying and selling prices.

Recently, Lewandowski [1] introduced and investigated a model of buying and selling prices, called *willingness to pay* and *willingness to accept*, respectively, based on the assumption that the decision maker derives preference over lotteries from changes in the initial wealth implied by accepting the given lottery. We deal with these notions under Rank-Dependent Utility, one of the behavioral models of decision making under risk. Applying some results concerning a comparison of quasideviation means, we characterize the properties of willingness to pay and willingness to accept related to the experimentally observed disparity between them.

References

[1] M. Lewandowski, *Buying and selling price for risky lotteries and expected utility theory with gambling wealth,*, J. Risk Uncertain. **48** (2014), 253–283.

[2] Zs. Páles, *Characterization of quasideviation means*, Acta. Math. Sci. Hungar. **40** (1982), 243–260.

[3] Zs. Páles, *General inequalities for quasideviation means*, Aequationes Math. **36** (1988), 32–56.

Renata DŁUGOSZ[1], Piotr LICZBERSKI[2]

[1,2] *Lodz University of Technology* (Łódź)

Jack Lemma, starlikeness and k-symmetry in $\mathbf{C}^n$

Let $\mathbf{B}^n$ and $\langle \cdot,\cdot \rangle$ be the open unit ball and the Euclidean inner product in $\mathbf{C}^n$, respectively. Many authors considered the family St of biholomorphic mappings $f : \mathbf{B}^n \to \mathbf{C}^n$, $f(0) = 0$, $Df(0) = I$, (the identity) with starlike domain $f(\mathbf{B}^n)$. Suffridge [Su] proved that a locally biholomorphic normalized map $f : \mathbf{B}^n \to \mathbf{C}^n$ belongs to St, iff

$$\operatorname{Re}\left\langle [Df(z)]^{-1} f(z), z \right\rangle > 0, \quad z \in \mathbf{B}^n \setminus \{0\}.$$

The subject of the lecture is a similar sufficient condition for a family $S(k)$, $k \geq 2$, of locally biholomorphic maps. To definition of $S(k)$ we use a unique partition [LP] $f = \sum_{j=0}^{k-1} f_{j,k}$ with components $f_{j,k}$ such that $f_{j,k}(\varepsilon z) = \varepsilon^j f_{j,k}(z)$, $z \in \mathbf{B}^n$, where $\varepsilon = \exp(\frac{2\pi i}{k})$. Let $S(k)$, $k \geq 2$, be a family of locally biholomorphic and normalized mappings $f : \mathbf{B}^n \to \mathbf{C}^n$, such that

$$\operatorname{Re}\left\langle [Df(z)]^{-1} f_{1k}(z), z \right\rangle > 0, \quad z \in \mathbf{B}^n \setminus \{0\}.$$

A good motivation for the family $S(k)$ is a problem from [Lic1], [HK]. To prove the main result we use a $\mathbf{C}^n-$ generalization of Jack Lemma [Lic2].

References

[HK] H. Hamada, G. Kohr, *k-fold symmetrical mappings and Loewner chains*, Demonstratio Math. **40** (2007), 85–94.

[Lic1] P. Liczberski, *Applications of a decomposition of holomorphic mappings in $\mathbb{C}^n$ with respect to a cyclic group*, J. Math. Anal. Appl. **281** (2003), 276–286.

[Lic2] P. Liczberski, *Jack's Lemma for holomorphic mappings in $\mathbb{C}^n$*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A **15** (1986), 131–139.

[LP] P. Liczberski, J. Połubiński, *On (j,k)-symmetrical functions*, Math. Bohemica **120** (1995), 13–28.

[Su] T. J. Suffridge, *The principle of subordination applied to functions of several variables*, Pacific J. Math. **33** (1970), 241–248.

Renata DŁUGOSZ[1], Piotr LICZBERSKI[2], Edyta TRYBUCKA[3]

[1,2] *Lodz University of Technology* (Łódź)
[3] *University of Rzeszów* (Rzeszów)

Majorization of the Temljakov operators for some Bavrin families in $\mathbf{C}^n$

The paper concerns holomorphic functions in complete bounded n-circular domains $\mathcal{G} \subset \mathbf{C}^n$. The object of the present investigation is to solve majorization problem of Temljakov operator $\mathcal{L}f$.

This type of problem has been studied earlier in [1] and [2]. In this paper we considered the family $\mathcal{M}_{\mathcal{G}} \cap \mathcal{F}_{(0,k)}(\mathcal{G})$, i.e., the function of the Bavrin family $\mathcal{M}_{\mathcal{G}}$, which are $(0,k)$-symmetrical.

References

[1] E. Leś-Bomba, P. Liczberski, *New properties of some families of holomorphic function of several complex variables*, Demonstratio Math. **3** (2009), 491–503.

[2] P. Liczberski, *On Bavrin's families $\mathcal{M}_{\mathcal{G}}$;$\mathcal{N}_{\mathcal{G}}$ of analytic functions of two complex variables*, Bull. Techn. Sci. Univ. Lodz **20** (1988), 29–37 (in German).

Stanisław DOMORADZKI[1], Małgorzata STAWISKA[2], Mykhailo ZARICHNYI[3]

[1,3] *University of Rzeszów* (Rzeszów)
[2] *AMS* (USA)

Matematyka we Lwowie w okresie międzywojennym i jej różne oblicza

Matematyka we Lwowie w okresie międzywojennym znana jest przede wszystkim z analizy funkcjonalnej i szkoły stworzonej przez S. Banacha i H. Steinhausa. W referacie opowiemy o innych dyscyplinach rozwijanych we Lwowie, oalgebrze, topologii, algebrze topologicznej (teorii topologicznych grupi semi-grup), logice, równaniach różniczkowych, teorii gier, teorii iteracji i innych.

Mathematics in Lwów in the interwar period and its different faces

Mathematics in Lwów between two world wars is known first of all by functional analysis and the school created by S. Banach and H. Steinhaus. We are going to emphasize that some other directions of mathematics were also developed in Lwów in that period: topology, algebra, topological algebra (theory of topological groups and semigroups), logics, game theory, differential equations, iteration theory etc.

Paweł DRYGAŚ

University of Rzeszów (Rzeszów)

On some generalization of ordinal sum of fuzzy implications

In this presentation we discuss some generalization of ordinal sum of fuzzy implications. The generalizations allow consider summands on intervals of different type: open, closed, or half-open, as well as other types of sets. Sufficient properties of fuzzy implications as summands for obtaining a fuzzy implication as a result are presented. As a result new ways of constructing of ordinal sum of fuzzy implications are obtained. The methods allow adapt the value of fuzzy implication to requirements.

References

[1] M. Baczyński, B. Jayaram, *Fuzzy implications*, Springer, Berlin, 2008.

[2] M. Baczyński,, P. Drygaś, R. Mesiar, *Monotonicity in the Construction of Ordinal Sums of Fuzzy Implications*, in V. Torra, R. Mesiar, B. De Baets (eds) *Aggregation Functions in Theory and in Practice*, Series: Advances in Intelligent Systems and Computing 581, Springer International Publishing, Switzerland, 2018.
[3] P. Drygaś, A. Król, *Various kinds of ordinal sums of fuzzy implications*, in Novel Developments in Uncertainty Representation and Processing, (K. T. Atanassov et al., eds.), Advances in Intelligent Systems and Computing 401, pp. 37–49, Springer International Publishing, Switzerland, 2016.
[4] Y. Su, A. Xie, H. Liu, *On ordinal sum implications*, Inform. Sciences **293** (2015), 251–262.

Jacek DZIOK

University of Rzeszów (Rzeszów)

Harmonic functions with correlated coefficients

Harmonic functions are famous for their use in the study of minimal surfaces and also play important roles in a variety of problems in applied mathematics. Recent interest in harmonic complex functions has been triggered by geometric function theorists Clunie and Sheil-Small [1].

A complex-valued continuous function $f : D \to \mathbf{C}$ is said to be harmonic in $D \subset \mathbf{C}$ if both functions $u := \operatorname{Re} f$ and $v := \operatorname{Im} f$ are real-valued harmonic functions in D. In any simply connected domain, we can write $f = h + \overline{g}$, where h and g are analytic in D.

The object of the present talk is to introduce the concept of harmonic functions with correlated coefficients. It generalizes the idea of harmonic functions with negative coefficients introduced by Silverman [3] and the idea harmonic functions with varying coefficients defined by Jahangiri and Silverman [2].

References

[1] J. Clunie, T. Sheil Small, *Harmonic univalent functions*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **9** (1984) 3–25.
[2] J. M. Jahangiri, H. Silverman, *Harmonic univalent functions with varying arguments*, Int. J. Appl. Math. **8** (2002), 267–275.
[3] H. Silverman, *Harmonic univalent functions with negative coefficients*, J. Math. Anal. Appl. **220** (1998), 283–289.

Marlena FILA

Uniwersytet Pedagogiczny (Kraków)

Błędne koło w Rein analytischer Beweis Bernarda Bolzano

Głównym celem rozprawy Bernarda Bolzano *Rein analytischer Beweis* [Bolzano, 1817] było udowodnienie, że wielomian, który w pewnym odcinku zmienia znak, ma w tym odcinku pierwiastek. W literaturze natomiast zwraca się uwagę raczej na to, że praca ta była pierwszą, w której zapisana została zasada supremum, warunek zupełności w sensie Cauchy'ego oraz definicja ciągłości funkcji [Grabiner, 1984]. Zwraca się także uwagę na dowód twierdzenia o przyjmowaniu wartości pośrednich przez funkcję ciągłą, który przedstawił Bolzano. Można także pokazać, że w rozprawie tej Bolzano posłużył się więcej niż jednym sformułowaniem aksjomatu ciągłości [Fila, 2017]. Co więcej, w tej pracy po raz pierwszy dokonało się rozróżnienie dwóch rodzajów ciągłości: ciągłości funkcji czyli własności odwzorowania oraz aksjomatu ciągłości czyli własności struktury będącej tu dziedziną rozważanych funkcji [Błaszczyk & Fila & Mrówka, 2017].

Niektórzy spośród komentujących tę rozprawę zarzucają jednak autorowi popełnienie błędu; jedni piszą o braku podstaw udowadnianych twierdzeń [Dadaczyński, 2008], inni o błędnym kole pojawiającym się w rozprawie [Bottazzini, 1986]. W referacie odniesiemy się do tych zarzutów. Pokażemy, na czym faktycznie polega błędne koło w omawianej rozprawie. Skomentujemy także stanowisko samego Bolzano, który pisał o błędnym kole w geometrycznych dowodach twierdzenia o przyjmowaniu wartości pośredniej.

Literatura

[1] E. Artin, O. Schreier, *Algebraische Konstruktion reeller Körper*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität **5** (1926), 85–99; *The algebraic construction of real fields*, in: M. Rosen (ed.), *Exposition by Emil Artin*, AMS-LMS, 273–283, 2007.

[2] P. Błaszczyk, M. Fila, L. Mrówka, *Wprowadzenie do rozprawy Bernarda Bolzano Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetzetes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*, Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia **IX** (2017), 185–195.

[3] B. Bolzano, *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetzes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*, Gottlieb Haase, Prague, 1817.

[4] B. Bolzano, *Czysto-analityczny dowód twierdzenia, że między każdymi dwoma wartościami, które dają wyniki przeciwnych znaków, leży jakiś rzeczywisty pierwiastek równania*, Tłumaczenie: M. Fila, Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia **IX** (2017), 177–198.

[5] U. Bottazini, *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrtass*, Springer-Verlag, 1986.

[6] L. W. Cohen, G. Ehrlich, *The Structure of the Real Number System*, Van Nostrand Co., Princeton, New Jersey, 1963.

[7] J. Dadaczyński, *Bernard Bolzano i idea logicyzmu*, Biblos, Tarnów, 2006.

[8] M. Fila, *Continuity axiom in Bolzano's memoir Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*, Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia **IX** (2017), 37–48.

[9] J. Grabiner, *Cauchy and Bolzano. Tradition and transformation in the history of mathematics* in: Transformation and Tradition in the Sciences. Essays in Honor of I. Bernhard Cohen, ed. E. Mendelsohn, Cambridge University Press, Cambridge, 1984, 105–124.

[10] P. Kitcher, *Bolzano's ideal of algebraic Analyzis*, Stud. Hist. Phil. Sci. **6** (1975), no. 3, 229–269.

[11] H. Teismann, *Toward a More Complete List of Completeness Axioms*, The American Mathematical Monthly, 2013, 99–114.

Marlena FILA

Pedagogical University of Krakow (Kraków)

Definitions of continuous function from Bolzano to Russell

We study various definitions of continuous function given in mathematics throughout the 19th century: starting with (Bolzano, 1817) and (Cauchy, 1821), through (Peano, 1901), (Stolz, 1885), (Dini, 1892), to (Russell, 1903). We focus on how requirements given first in natural languages have finally reached a symbolic form presented in Principia Mathematica, § 234. To this end, we employ a formalization method that consists of rewriting sentences specified in natural languages into formulas (symbolic characters). The main concern during the formalization is to assure equivalence of the final translation and the original. Explicit definitions of continuity are but a starting point in our search for an adequate formula for continuous function. We also examine proofs which employ definitions of continuity, as well as examples of continuous and discontinuous functions provided by the discussed authors. We show that a notion of discontinuous function is by no means a negation of continuous function. We show that the final definition of continuous function as written in symbols captures the notion of continuity exploited in proofs, rather than a linguistic form of the discussed definitions.

References

[1] B. Bolzano, *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetzes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*, Prague, 1817.

[2] A. Cauchy, *Cours d'Analyse*, Paris, 1821.

[3] U. Dini, *Grundlagen für eine Theorie der Functionen einer veränderlicher reellen Grösse*, Leipzig, 1892.

[4] G. Peano, *Formulaire de Mathématiques, Paris, Gauthier-Villars, Imprimeur-Libraire du burean des lonqitues, de l'ecole polytechnique*, Quai des Grands-Augustin, 55, §73, 1901.

[5] O. Stolz, *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik. Nach den neueren Ansichten*, Leipzig, 1885.

[6] B. Russell, *The principles of mathematics, London & New York*, XXXIX, 474, 1903.
[7] S. Russ, *The mathematical works of Bernard Bolzano, Oxford University Press*, 2004.

Piotr JASTRZĘBSKI

University of Warmia and Mazury in Olsztyn (Olsztyn)

CAS - Computer Algebra System. How do computers help in scientific research in mathematics?

I will review some known examples of CAS: GAP, SymPy (Python), Matlab (Symbolic Math), etc. I will also give application to the Clifford-Klein form problem. The recent result is the non-existence of Clifford-Klein forms in exceptional case.

Sylwia KANIA

Uniwersytet Śląski (Katowice)

Metody aktywizujące z wykorzystaniem TIK

Skuteczne nauczanie obliguje nauczyciela na każdym etapie edukacyjnym do stosowania zróżnicowanych metod i form pracy. Oprócz metod tradycyjnych, od których nie można całkowicie odejść w procesie nauczania matematyki, należy podejmować działania uaktywniające uczniów. Dokonując wyboru metody nauczyciel powinien brać pod uwagę nowe techniki informacyjne i dostosować własny sposób komunikacji do naturalnego sposobu komunikacji odbiorców procesu dydaktycznego.

Wystąpienie ma na celu zaprezentowanie przykładowych metod aktywizujących, które wykorzystują narzędzia informatyczne w postaci quizów interaktywnych (Quizizz), kodów QR, plansz interaktywnych (Flipquiz), gamifikacji (WordWall) czy dydaktycznemu wykorzystaniu memów.

Literatura

[1] https://www.qr-online.pl/
[2] https://quizizz.com/
[3] https://flipquiz.me/
[4] https://wordwall.net/pl

Leopold KOCZAN[1], Paweł ZAPRAWA[2]

[1,2]*Lublin University of Technology* (Lublin)

Coefficient problem for functions with positive real part and applications

For $p(z) = 1+p_1z+p_2z^2+\dots$ in the class $\mathcal{P}$ of functions with positive real part we define $P_n = p_1+p_2+\dots+p_n$. Applying two known results obtained by Lecko and Brown, we find the bounds of P_n with a fixed p_1. We also show possible applications of this result. We derive the bounds of $S_n = 1+a_2+a_3+\dots+a_n$ and $|a_{n+1}-a_n|$ with a second coefficient a_2 fixed, where a_n are coefficients of functions in one of the following classes: $\mathcal{T}$ of typically real functions, $\mathcal{K}$ of convex functions, $\mathcal{S}^*(1/2)$ of functions which are starlike of order $1/2$, $\mathcal{K}_{\mathbf{R}}(i)$ of functions convex in the direction of the imaginary axis with real coefficients and $\mathcal{T}(1/2)$ of typically real functions of order $1/2$.

References

[1] J. E. Brown, *Successive coefficients of functions with positive real part*, Int. J. Math. Anal. (Ruse) **4** (2010), 2491–2499.
[2] A. Lecko, *On Coefficient Inequalities in the Carathéodory Class of Functions*, Ann. Polon. Math. **75** (2000), 59–67.

Mikhail KOLEV

University of Warmia and Mazury in Olsztyn (Olsztyn)

On the application of mathematical and computational approaches in medicine

Over the past decades mathematical and computational technics have been widely used for analysis of various processes in biology and medicine, in particular the interactions between the immune system and foreign pathogens (viruses, bacteria, etc.), cancer cells etc., the efficacy of various therapeutic approaches and in particular issues related to bacterial resistance to antibiotic treatment. Nowadays the problem of increasing resistance of microbes to numerous kinds of antibiotics is very challenging due to the difficulties in the treatment of infectious diseases following from the developed ability of many pathogens not to be affected by certain antibiotics.

The talk is devoted to a new mathematical model describing the interactions between bacterial infection and immune system as well as the problem of bacteria resistance to treatment with antibiotics. Some quantitative properties of the model are studied. Numerical algorithm for obtaining an approximate solution is developed and implemented by the use of Matlab package. Results of numerical experiments are presented and commented from medical point of view.

Bogumiła KOWALCZYK[1], Adam LECKO[2]

[1,2] *Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie* (Olsztyn)

O współczynnikach w klasie Carathéodory'ego

Przedstawiona zostanie metoda i wzory na współczynniki c_n, $n \in \mathbf{N}$, wraz z funkcjami ektremalnymi w klasie Carathéodory'ego funkcji analitycznych p określonych w kole jednostkowym $\mathbf{D} := \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ o rozwinięciu

$$p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n, \quad z \in \mathbf{D},$$

wyrażone za pomocą parametru leżącego w domkniętym polidysku $\overline{\mathbf{D}}^n$ ([1], [2]).

Literatura

[1] N. E. Cho, B. Kowalczyk, A. Lecko, *Sharp bounds of some coefficient functionals over the class of functions convex in the direction of the imaginary axis*, Bull. Aust. Math. Soc. **100** (2019), 86–96

[2] N. E. Cho, B. Kowalczyk, A. Lecko, B. Śmiarowska, *A note on fourth and fifth coefficients in the Carathéodory class*, (złożona do druku).

Jacek KUCAB

Uniwersytet Rzeszowski (Rzeszów)

O pewnych własnościach funkcji typu Higsona kontrolowanych logarytmicznie

Funkcje typu Higsona, czyli ciągłe i ograniczone funkcje określone na właściwych i nieograniczonych przestrzeniach metrycznych, dla których średnica obrazu kul o stałych promieniach znika w nieskończoności stanowią interesującą klasę odwzorowań. Tu rozpatrywane są podlogarytmiczne funkcje Higsona, to znaczy funkcje dla których

$$\lim_{|x|\to\infty} \operatorname{diam}(f(B_{l(|x|)}(x))) = 0$$

dla dowolnej asymptotycznej funkcji podlogarytmicznej l (czyli rosnącej wolniej niż jakakolwiek rosnąca funkcja logarytmiczna). Okazuje się, że tego typu klasa funkcji tworzy domknięty podpierścień R funkcji ciągłych i ograniczonych, oddzielajacy punkty od zbiorów domkniętych i zawierający funkcje stałe. Towarzyszy im zatem ([K]) uzwarcenie $\overline{e(X)}$, gdzie

$$e : X \to \prod_{f\in R} [\inf\{f(x) \mid x \in X\}, \sup\{f(x) \mid x \in X\}]; e(x)_f = f(x).$$

Skonstruowane przykłady świadczą, że uzwarcenie owo wpisuje się ściśle pomiędzy uzwarcenie Higsona, a uzwarcenie podpotęgowe ([KZ]). Intresujący wydaje się też związek pomiędzy wymiarem pokryciowym tego uzwarcenia, a wymiarem asymptotycznym typu logarytmicznego wyjściowej przestrzeni.

Literatura

[K] J. Keesling, *Subcontinua of the Higson corona*, Topology and its Applications **80** (1997), 155–160.

[KZ] J. Kucab, M. Zarichnyi, *Subpower Higson corona of a metric space*, Algebra and Discrete Mathematics **17** (2014) no. 2, 280–287.

Adam LECKO

Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie (Olsztyn)

Pewne uogólnienie podporządkowania różniczkowego typu Briota-Bouqueta

Przedstawione zostanie uogólnienie podporządkowania różniczkowego typu Briota-Bouqueta i jego zastosowania do badań podporządkowań różniczkowych opartych na średnich ([1]).

Literatura

[1] A. Lecko, *On the generalized Briot-Bouquet differential subordination*, (złożona do druku).

Julian Ławrynowicz[1], Małgorzata Nowak-Kępczyk[2]

[1] *Uniwersytet Łódzki* (Łódź), *Instytut Matematyczny PAN* (Warszawa)
[2] *Katolicki Uniwersytet Lubelski Jana Pawła II* (Lublin)

The role of binary and ternary systems in protein studies. Introduction

Rola struktur binarnych i ternarnych w badaniu protein. Wprowadzenie

Rozważamy rozmaite aspekty struktur binarnych, ternanych, kwaternarnych i senarnych dla stopów, polimerów i protein. W szczególności odnosimy się do struktur kwinarnych i senarnych w niektórych polimerach wskazując na rolę maksimów energii w spektroskopiach podczerwieni i Ramana. Rozważamy rozkład struktur kwinarnych do ternarnych. Proponujemy zespoloną metodę analityczną dla binarnych i ternarnych rozszerzeń Galois, jak również ich realizację na powierzchniach Riemanna. Omawiamy lekko falujące zachowanie układu sześciokątów w liściu polimeru.

Literatura

[1] F. Ducastelle, F. Gauthier, *Generalized perturbation theory in disordered transitional alloys: Applications to the calculation of ordering energies*, J. Phys. F **6** (1976), 2039; doi: 10:1088/0305-4608/6/11/065.

[2] P. G. de Gennes, *Scaling Concepts in Polymer Physics*, Cornel University Press, 1979.

[3] H. F. Gilbert, *Basic Concepts in Biochemistry (A Student Survival Guide)*, McGraw-Hill, Inc., 1992.

[4] O. Suzuki, *Binary and ternary structure in the evolutions of the universe* ($2\times 3\times 2\times 2\times\cdots$ *world). From space-time to molecular biology*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź Sér. Rech. Déform. **69** (2019), no. 1, 13–26.

[5] O. Suzuki, *Binary and ternary structure in the evolutions of the universe ($2 \times 3 \times 2 \times 2 \times \cdots$ world) II. The description of further stages of the evolutions (Polymers, molecular biology, and natural language)*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź Sér. Rech. Déform. **69** (2019), no. 1, 27–34.

[6] C. Tsallis, *Introduction to nonextensive statistical mechanics (Approaching a complex world)*, Springer Verlag, New York, Inc., 2009.

[7] H. Umezawa, *Advanced field theory (Micro, Macro and Thermal Physics)*, American Institute of Physics, 1993.

[8] B. L. van der Waerden, *Moderne algebra 2*, Berlin Verlag von Julius Springer, 1937.

[9] J. J. Sylvester, *A word on nonions*, John Hopkins Univ. Circulars **1** (1882), 241–242 (1883), 46; in: The Collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester, vol. III, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1909, pp. 647–650.

[10] J. Ławrynowicz, M. Nowak-Kępczyk, M. Rausch de Traubenberg, M. Zubert, *Mathematics behind two related nobel prizes 2016: in physics - topology governing physics of phase transitions, in chemistry – geometry of molecular nanoengines*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź Sér. Rech. Déform. **69** (2019), no. 1.

[11] C. S. Peirce, *On Nonions*, in: Collected Papers of Charles Sanders Peirce, 3rd ed., vol. III, Harvard University Press, Cambridge Mass, 1967, pp. 411–416.

[12] J. Ławrynowicz, O. Suzuki, A. Niemczynowicz, M. Nowak-Kępczyk, *Fractals and chaos related to Ising-Onsager-Zhang lattices. Ternary approach vs. binary approach*, Int. J. of Geom. Meth. in Modern Physics **15** (2018), no. 11 (01 Nov 2018) 1850187; https://doi.org/10.1142/S0219887818501876.

[13] J. Ławrynowicz, M. Nowak-Kępczyk, A. Valianti, M. Zubert, *Physics of complex alloys — one dimensional relaxation problem*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź Sér. Rech. Déform. **65** (2015), 27–48.

Ołeh ŁOPUSZAŃSKI

University of Rzeszów (Rzeszów)

Weyl-Schrödinger representations of matrix Heisenberg groups in infinite dimensions

A complexified analog $\mathrm{H}_{\mathbf{C}}$ of Heisenberg's group which consists of matrices $X(a,b,t)$ with entries from an infinite-dimensional Hilbert space $\{H, \langle\cdot \mid \cdot\rangle\}$ with identical operator $\mathbb{1}$ and an orthonormal basis $(\mathfrak{e}_i)$ such that

$$X(a,b,t)=\begin{bmatrix}1 & a & t\\ 0 & \mathbb{1} & b\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ X(a,b,t)X(a',b',t)=\begin{bmatrix}1 & a+a' & t+t'+\langle a\mid b'\rangle\\ 0 & \mathbb{1} & b+b'\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad a,b\in H,\ t\in\mathbf{C},$$

with the unit $X(0,0,0)$ and the inverse $X(a,b,t)^{-1}=X\left(-a,-b,-t+\langle a\mid b\rangle\right)$ is investigated. The following Weyl-Schrödinger irreducible representation on the space of scalar functions L^2_χ is analysed,

$$X(a,b,t)\longmapsto \exp(t)W^\dagger(a,b),\quad W^\dagger(a,b):=\exp\left\{\langle a\mid b\rangle/2\right\}T^\dagger_b M^\dagger_{a^*},\quad a^*(\cdot):=\langle\cdot\mid a\rangle,$$

where $T^\dagger_b$ and $M^\dagger_{a^*}$ are representations of the additive group $(H,+)$ over L^2_χ via shift and multiplicative groups generated by $\partial^\dagger_b$ and $\bar\phi_a$, respectively, using the appropriate Fourier transform F over L^2_χ. Then the Weyl system $W^\dagger(a,b)$ has the densely-defined generator $\mathfrak{p}^\dagger_{a,b}=\partial^\dagger_b+\bar\phi_a$ which satisfies the commutation relation

$$W^\dagger(a,b)W^\dagger(a',b')=\exp\left\{-\left[\mathfrak{p}^\dagger_{a,b},\mathfrak{p}^\dagger_{a',b'}\right]\right\}W^\dagger(a',b')W^\dagger(a,b).$$

In above by assumption the probability measure $\chi=\varprojlim\chi_i$ has the structure of projective limit of probability Haar's measures χ_i on unitary groups $i\times i$-matrices $U(i)$ under Kolmogorov's consistency conditions $\chi_i=\pi^{i+1}_i(\chi_{i+1})$ which is determined over the associated projective limit $\mathfrak{U}=\varprojlim U(i)$ under the Livšic transform

$$\pi^{i+1}_i\colon U(i+1)\ni\begin{bmatrix}u_i & x\\ y & t\end{bmatrix}\longmapsto\begin{cases}u_i-[x(1+t)^{-1}y]\in U(i) & : t\neq-1\\ u_i\in U(i) & : t=-1\end{cases},\quad x,y\in\mathbf{C}.$$

To every $h\in H$ it is assigned the Paley-Wiener map $\phi\colon H\ni h\mapsto\phi_h\in L^2_\chi$ with $\phi_h(\mathfrak{u})=\sum\phi_i(\mathfrak{u})\,\mathfrak{e}^*_i(h)$ where $\phi_i(\mathfrak{u})=\langle u_i(\mathfrak{e}_i)\mid\mathfrak{e}_i\rangle$ and $u_i=(\pi^{i+1}_i\circ\pi_{i+1})(\mathfrak{u})=\pi_i(\mathfrak{u})$ are functions in variable $\mathfrak{u}\in\mathfrak{U}$ and $\int\exp\{\mathrm{Re}\,\phi_h\}d\chi=\exp\{\|h\|^2/4\}$. L^2_χ have two bases of orthogonal polynomials $\phi^\lambda_\imath=\phi^{\lambda_1}_{\imath_1}\ldots\phi^{\lambda_\eta}_{\imath_\eta}$ in variables $\phi_\imath=\left(\phi_{\imath_1},\ldots,\phi_{\imath_\eta}\right)$ such that $\|\phi^\lambda_\imath\|^2_\chi=\int|\phi^\lambda_\imath|^2d\chi=\beta_\lambda\lambda!$ with $\beta_\lambda=\dfrac{(\eta-1)!}{(\eta-1+n)!}$ and $\lambda!=\lambda_1!\ldots\lambda_\eta!$, as well as, of orthonormal

Schur polynomials $s_\imath^\lambda(\phi_\imath) = \sum_{[\imath^\lambda]} \phi_\imath^\lambda$ with summation over all semistandard Young tabloids $[\imath^\lambda]$ in which $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\eta) \in \mathbf{N}^\eta$ is a partition of $n \in \mathbf{N}$ of a length η and $\imath = (\imath_1, \ldots, \imath_\eta) \in \mathbf{N}^\eta$.

Fourier's transform $\hat{f}(h) = \int \exp\left(2\,\mathrm{Re}\,\phi_h - \|h\|^2\right) f\, d\chi$ provides the isometry $F\colon L^2_\chi \ni f \longmapsto \hat{f} \in H^2_\beta$ onto the Hardy space H^2_β of entire analytic functions $\hat{f}(h)$ in variable $h \in H$, generated by Hilbert-Schmidt polynomials $\mathfrak{e}_\imath^{*\lambda} = \mathfrak{e}_{\imath_1}^{*\lambda_1} \ldots \mathfrak{e}_{\imath_\eta}^{*\lambda_\eta}$ normalized as $\|\mathfrak{e}_\imath^{*\lambda}\|_{H^2_\beta} = \left(\beta_\lambda \lambda!\right)^{1/2}$. Thus, F acts as entire analytic extensions of ϕ_h onto H and can be understood as an infinite-dimensional generalization of the Paley-Wiener theorem.

References

[1] O. Lopushansky, *Weyl-Schrödinger representations of Heisenberg groups in infinite dimensions*, https://arxiv.org/abs/1902.01473.

Svetlana MINCHEVA-KAMIŃSKA

Uniwersytet Rzeszowski (Rzeszów)

O istnieniu splotu ultradystrybucji typu Roumieu

Rozważamy różne ogólne warunki funkcjonałowe i ciągowe splatalności ultradystrybucji typu Roumieu w przestrzeni $\mathcal{D}'^{\{M_p\}}(\mathbf{R}^d)$. Dowodzimy równoważności rozważanych warunków. Wskazujemy związek warunków ciągowych, wyrażonych w terminach klas $\mathbb{U}^{\{M_p\}}$ oraz $\overline{\mathbb{U}}^{\{M_p\}}$ aproksymatywnych jedynek, z całkowalnością ultradystrybucji typu Roumieu.

Podajemy warunki dostateczne istnienia splotu dwóch ultradystrybucji typu Roumieu w języku ich nośników. Dowodzimy, że warunki te są optymalne w terminach nośników. Przy użyciu tych warunków wykazujemy ciągową ciągłość splotu ultradystrybucji typu Roumieu.

Literatura

[1] R. D. Carmichael, A. Kamiński, S. Pilipović, *Boundary Values and Convolution in Ultradistribution Spaces*, World Scientific, 2007.

[2] A. Kamiński, D. Perišić, S. Pilipović, *Existence theorems for convolution of ultradistributions*, Dissertationes Math. **340** (1995), 93–114.

[3] H. Komatsu, *Ultradistributions, III: Vector valued ultradistributions and the theory of kernels*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. I A Math. **29** (1982), 653–717.

[4] S. Mincheva-Kamińska, *A sequential approach to the convolution of Roumieu ultradistributions* (submitted).

[5] S. Mincheva-Kamińska, *Existence theorems for convolution of Roumieu ultradistributions* (submitted).

[6] S. Pilipović, B. Prangoski, *On the convolution of Roumieu ultradistributions through the ε tensor product*, Monatsh. Math. **173** (2014), 83–105.

[7] M. Valdivia, *On the structure of ceratain ultradistributions*, Rev. R. Acad. Cien. Serie A Mat. **103** (2009), 17–48.

Jerzy MONTUSIEWICZ[1], Marcin BARSZCZ[2], Krzysztof DZIEDZIC[3]

[1,2,3]*Politechnika Lubelska* (Lublin)

Metodyka cyfrowej rekonstrukcji uszkodzonych naczyń z wykopalisk archeologicznych

Współczesny rozwój komputerowych technologii w obszarze grafiki komputerowej pozwala na efektywne przenoszenie artefaktów archeologicznych i muzealnych ze świata realnego do rzeczywistości cyfrowej. Dzięki temu możliwe stało się nie tylko szybkie i masowe udostępnienie dóbr kultury, ale także tworzenie cyfrowych rekonstrukcji obiektów uszkodzonych przywracając ich pierwotny kształt i wygląd [2], [3].

W pracy przedstawiono metodykę, która pozwala na efektywną realizację celów postawionych komputerowym grafikom przez archeologów. Opisano zarówno dobór właściwych urządzeń i programów, które pozwalają na efektywne przeprowadzenie procesu digitalizacji 3D obiektów archeologicznych, przetworzenie uzyskanej chmury punktów na obiekty powierzchniowe oraz ich optymalizację ze względu na rozmiar. Ponadto przedstawiono sposób odtworzenia brakujących fragmentów naczyń posiadających oś symetrii oraz metodę generowania tekstur na odtworzonych cyfrowych fragmentach [4].

W części praktycznej wykonano fotorealistyczną rekonstrukcję powierzchni zewnętrznej i wewnętrznej ścianek bocznych oraz dna dzbana z XII wieku pochodzącego z wykopalisk Afrasiab w Samarkandzie (Uzbekistanie). Do tego celu wykorzystano skaner Artec Spider służący do akwizycji danych o powierzchni i teksturze digitalizowanego obiektu, a także programy Artec Studio 12 Profesional, 3ds Max, Blender oraz Gimp.

Literatura

[1] J. Kęsik, J. Montusiewicz, R. Kayumov, *An approach to computer-aided reconstruction of museum exhibits*, Advances in Science and Technology Research Journal **11** (2017), no. 2, 87–94.

[2] L. Gomes, O. R. Pereira Bellon, L. Silva, *3D reconstruction methods for digital preservation of cultural heritage: A survey*, Pattern Recognition Letters **50** (2014), 3–14.

[3] H. Hernandez, *3D Reconstruction of Vessels Using 'CGVIEW'*, Universita' Degli Studi di Cagliari, 2012.

[4] Ch. Dostala, K. Yamafune, *Photogrammetric texture mapping: A method for increasing the Fidelity of 3D models of cultural heritage materials*, Journal of Archaeological Science: Reports **18** (2018), 430–436.

Antoni PARDAŁA

Politechnika Rzeszowska (Rzeszów)

Priorytety informatyzacji kształcenia matematycznego - a praktyka, wyzwania i zagraniczne tendencje

Motywacje wyboru tematu referatu mają związek z fenomenami XXI wieku, które określane są jako:

1) Big Data i Data Science we współczesnym świecie;
2) IKT w badaniach naukowych, ich wykorzystanie w edukacji i modernizacji procesu edukacyjnego, bądź we współczesnym rozwoju ekonomicznym i społecznym państw świata.

W referacie nawiązuje się do jednego z kluczowych kierunków badań współczesnej dydaktyki matematyki: *Teoretyczne i praktyczne aspekty kształcenia i doskonalenia nauczycieli matematyki i informatyki w różnych krajach - doświadczenia i najlepsze praktyki dla potrzeb przyszłości.* Problematyka i wątki referatu dotyczą m.in. próby analizy praktyki polskiej i zagranicznej oraz innowacji w zakresie nauczania i uczenia się matematyki, kształcenia i doskonalenia kadry nauczycieli matematyki. To opracowanie ma tu charakter *case study.* Jego celem jest syntetyczne wskazanie wyników badań z wybranej literatury, przykładów i zagranicznych doświadczeń z praktyki kształcenia i doskonalenia nauczycieli matematyki. Obserwacja polskiej praktyki potwierdza, że z naborem studentów do zawodu nauczyciela matematyki są trudności w uczelniach. A dotychczasowe programy studiów matematycznych na specjalności *nauczanie matematyki* i ich realizacja, nabywana przez studentów wiedza teoretyczna z przedmiotów matematycznych, bądź dotycząca metod nauczania i prowadzenia lekcji matematyki, bądź metody egzaminowania i weryfikowania ich przydatności do zawodu nauczycielskiego czasami tracą już na znaczeniu. I nie są skorelowane z ich potrzebami i kształtowaniem oczekiwanych współczesnych nawyków typu *soft skills*, które także powinni nabywać ich uczniowie, studenci, oraz *hard skills.* Autor referatu podkreśla także, że nie można zapominać o innych priorytetach i problemach badawczych, wyzwaniach XXI wieku. I zachęca badać ten open problem: *informatyzacja kształcenia ogólnego i przedmiotowego, w szczególności edukacji matematycznej dzieci, uczniów i studentów dla potrzeb przyszłości, a także informatyzacja kształcenia i doskonalenia kadr nauczycieli matematyki dla wyzwań i potrzeb przyszłości*, vide: www.linkedin.com/in/alexkrol

Literatura

[1] A. Pardała, R. I. Kadirbayeva, M. J. Jamankarayeva, *Priorities in the teaching of mathematics for the futures*, CONCORDE 2019, no. 2, 76–87.

[2] A. R. Saravanakumar, A. M. Jazeel, *Role of computing and ICT as a change agent for education*, January 2019; DOI: 10.13140/RG.2.2.35445.63204.

[3] A. R. Saravanakumar, *Distance Mode (DM) Teacher Education Programme (TEP) in India: An Integrated Approach (IA)*, Journal of Emerging Technologies and Innovative Research **5** (2018), no. 12 (December), 7–9.

[4] M. Webb, *Pedagogy with information and communications technologies in transition*, Education and Information Technologies **19** (2014), no. 2 (June), 275–294.

MACIEJ PAROL

Katolicki Uniwersytet Lubelski Jana Pawła II (Lublin)

Jednolistność pewnego operatora całkowego

Prezentowane wyniki dotyczą funkcji postaci:

$$\mathbf{D} \ni z \mapsto F(z; f, g; \nu) := \int_0^z (f'(u))^{|\nu|} \mathrm{e}^{\nu g(u)} \mathrm{d}u \ ,$$

gdzie f i g są pewnymi znormalizowanymi funkcjami holomorficznymi oraz $\nu \in \mathbf{C}$. O funkcji f zakłada się dodatkowo, że jest wypukła lub prawie wypukła, natomiast o funkcji g, że jest ograniczona. W szczególności omawiane są jednolistność i prawie wypukłość funkcji $F(\cdot; f, g; \nu)$ w zależności od parametru ν.

Prezentacja jest oparta na wynikach uzyskanych wspólnie z Szymonem Ignaciukiem.

LITERATURA

[1] D. Breaz, N. Ularu, *Univalence criterion and convexity for an integral operator*, Applied Mathematics Letters **25** (2012), no. 3, 658–661.

[2] S. Ignaciuk, M. Parol, *Criteria of univalence for a certain integral operator*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A (przyjęta do druku).

DARIUSZ PARTYKA

Katolicki Uniwersytet Lubelski Jana Pawła II (Lublin),
Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa w Chełmie (Chełm)

Brzegowe charakteryzacje zespolonych funkcji quasiregularnych w kole jednostkowym

W 1987 r. J. Krzyż scharakteryzował brzegowe wartości odwzorowań quasikonforemnych koła jednostkowego $\mathbf{D} := \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ na siebie. Wykazał on w pracy [1], że dla dowolnego odwzorowania quasikonforemnego koła $\mathbf{D}$ na siebie jego brzegowy homeomorfizm f spełnia dla pewnego $M \geq 1$ warunek M-quasisymetrii

$$\frac{1}{M} \leq \frac{|f(I_2)|_1}{|f(I_1)|_1} \leq M \tag{1}$$

dla każdej pary łuków domkniętych I_1 i I_2 okręgu jednostkowego $\mathbf{T} := \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$ o długości $|I_1|_1 = |I_2|_1 > 0$, których przecięcie $I_1 \cap I_2$ jest zbiorem jedno lub dwupunktowym. Na odwrót, dla dowolnych $M \geq 1$ i zachowującego orientację homeomorfizmu f okręgu $\mathbf{T}$ na siebie, jeśli f spełnia warunek quasisymetrii (1), to istnieje odwzorowanie quasikonforemne koła $\mathbf{D}$ na siebie takie, że f jest jego brzegowym homeomorfizmem.

Referat dotyczy uogólnienia wyników Krzyża na quasiregularne odwzorowania koła $\mathbf{D}$ na siebie i jest oparty na wynikach uzyskanych wspólnie z Magdaleną Figiel.

LITERATURA

[1] J. G. Krzyż, *Quasicircles and harmonic measure*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math. **12** (1987), 19–24.

ANNA PETIURENKO

Uniwersytet Pedagogiczny im. Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie (Kraków)

Metoda Pola, jako nowa metoda nauczania geometrii

Celem referatu jest zaprezentowanie metody pola, jako nowej metody dowodzenia twierdzeń z geometrii elementarnej. Głównym twierdzeniem metody pola jest twierdzenie co-side, które jest uogólnieniem dobrze znanego twierdzenia: stosunek pól trójkątów o tej samej podstawie jest równy stosunkowi wysokości opuszczonych na tę podstawę. Przy użyciu tej metody można otrzymać alternatywne dowody wielu twierdzeń matematycznych jak w sposób zwykły tak i w zautomatyzowany. Taki dowód pokazuje inny tryb przeprowadzania rozumowania matematycznego. Najpierw eliminowanie wprowadzonych punktów, w odwrotnej kolejności, z wykorzystaniem do tego celu lematów eliminacji. Po eliminacji wszystkich punktów zostaje trywialna równość, której można w prosty sposób przyporządkować wartość logiczną. Przy odpowiednim opracowaniu i interpretacji teoria metody pola i jej implementacja za pomocą WinGCLC pozwala sformułować nowe podejście do nauczania geometrii przez wykorzystanie automatycznego dowodu. Pokazujemy przykłady wybranych dowodów w celu zaprezentowania możliwości i ograniczenia metody pola.

Metoda pola została opisana i przeanalizowana po raz pierwszy w [3] na początku lat dziewięćdziesiątych. W [4] określono teorię aksjomatyczną metody pola. W referacie, również, przedstawiamy model aksjomatycznej teorii metody pola [4]: geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ z porządkiem leksykograficznym.

Literatura

[1] P. Błaszczyk, K. Mrówka, *Euklides Elementy. Księgi V-VI teoria proporcji i podobieństwa, tłumaczenie i komentarz*, Copernicus Center Press, Kraków, 2013 (in Polish).

[2] F. Botana, M. Hohenwarter, P. Janičić, et al., *Automated Theorem Proving in GeoGebra: Current Achievements*, Journal of Automated Reasoning **55** (2015), no. 1, 39–59.

[3] S. C. Chou, X. S. Gao, J. Z. Zhang, *Machine Proofs in Geometry*, World Scientific, Singapore, 1994.

[4] P. Janičić, J. Narboux, P. Quaresma, *The area method*, Journal of Automated Reasoning **48** (2012), no. 4, 489–532.

Barbara PĘKALA

University of Rzeszów (Rzeszów)

Atanassov intuitionistic fuzzy setting and quivalence measures used to algorithm of image processing

In this presentation, the new aspect in the issue of measuring the degree of inclusion and equivalence measure for Atanassov intuitionistic fuzzy setting is considered. We propose an application of the inclusion and equivalence measures created by using the partial or linear order on Atanassov intuitionistic fuzzy setting. Moreover, some properties of inclusion and equivalence measures and some correlation between them and aggregation operators are examined and their possible application in image processing is indicated.

Krzysztof PIEJKO[1], Edyta TRYBUCKA[2]

[1] *Rzeszow University of Technology* (Rzeszów)
[2] *University of Rzeszów* (Rzeszów)

Some coefficients problems for the subclass of close-to-convex functions

In this presentation we study some coefficients problems for a subclass of closse-to-convex functions defined in [1]. Exactly we solve the Fekete-Szegö problem and determine the sharp bound of the second Hankel determinant.

References

[1] J. Kowalczyk, E. Leś-Bomba, *On a subclass of close-to-convex functions*, Appl. Math. Letters **23** (2010), 1147–1151.

[2] C. Gao, S. Zhou, *On a class of analytic functions related to the starlike functions*, Kyungpook Math. J. **45** (2005), 123–130.

[3] T. Hayami, S. Owa, *Generalized Hankel Determinant for Certain Classes*, Int. J. Math. Anal. **4** (2010), no. 49-52, 2573–2585.

Agnieszka PRUSIŃSKA[1], Alexey TRETYAKOV[2]

[1,2] *Uniwersytet Przyrodniczo-Humanistczny w Siedlcach* (Siedlce)

Zagadnienia osobliwe nieliniowej optymalizacji

W komunikacie przedstawiamy metodę rozwiązań pewnego typu problemów nieliniowej optymalizacji z ograniczeniami wyrażonymi za pomocą odwzorowań osobliwych, wykorzystującą teorię p-regularności. W szczególności, przedstawione zostaną takie zagadnienia, jak uogólnienie stożka stycznego do zbioru rozwiązań równania operatorowego i warunki optymalności wyższych rzędów.

Literatura

[1] E. Bednarczuk, A. A. Tretyakov, *p-regular nonlinearity: tangency at singularity in degenerate optimization problems*, Math. Meth. Oper. Res. **86** (2017), 485–500.

[2] U. Ledzewicz, H. Schättler, *A high-order generalization of the Lyusternik theorem*, Nonlinear Analysis **34** (1998), 793–815.

[3] A. Prusińska, A. A. Tretyakov, *p-regularity theory. Tangent cone description in the singular case*, Ukrainian Mathematical Journal **67** (2016), 1236–1246.

Wojciech ROSA[1], Yaroslav CHABANYUK[2]

[1,2] *Lublin University of Technology* (Lublin)

Modeling electricity prices with diffusion-type process with semi-Markov switchings

We will present applications of stochastic approximation procedure in semi-Markov environment [2]. Next we will show and consider an overview of the electricity price models [1]. Then we will present, simulate and test a model with semi-Markov switchings.

References

[1] R. Weron, M. Bierbrauer, S. Truck, *Modeling electricity prices: jump diffusion andregime switching*, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications **336** (2004), 39–48.

[2] Y. Chabanyuk, W. Rosa, *Procedure of stochastic approximation for the diffusion process with semi-Markov switchings*, Ukrainian Mathematical Journal **70** (2019), 1803–1811.

Agnieszka SIBELSKA

Uniwersytet Łódzki (Łódź)

O kilku własnościach pewnych klas typu Bavrinowskiego funkcji holomorficznych wielu zmiennych zespolonych

Niech $\mathcal{G} \subset \mathbf{C}^n$ będzie ograniczonym pełnym obszarem n-kołowym. Przez $\mathcal{N}_{\mathcal{G}}^S$ i $\mathcal{N}_{\mathcal{G}}^k$, $k = 2, 3, \ldots$, oznaczmy klasy funkcji holomorficznych $f : \mathcal{G} \to \mathbf{C}$, $f(0) = 1$, zdefiniowane odpowiednio przy pomocy warunków analitycznych

$$\operatorname{Re} \frac{\mathcal{L}\mathcal{L}f(z)}{\mathcal{L}f_E(z)} > 0, \quad z \in \mathcal{G} \text{ (dla klasy } \mathcal{N}_{\mathcal{G}}^S),$$

$$\operatorname{Re} \frac{\mathcal{L}\mathcal{L}f(z)}{\mathcal{L}f_{0,k}(z)} > 0, \quad z \in \mathcal{G} \text{ (dla klasy } \mathcal{N}_{\mathcal{G}}^k),$$

gdzie $\mathcal{L}$ jest operatorem Temljakova postaci

$$\mathcal{L}f(z) = f(z) + Df(z)(z), \quad z \in \mathcal{G},$$

przy czym f_E stanowi parzystą część funkcji f, zaś $f_{0,k}$, $k = 2, 3\dots$, jest $(0, k)$-symetryczną częścią funkcji f (zob. [2]).

Podczas komunikatu przedstawione zostaną pewne własności klas $\mathcal{N}_{\mathcal{G}}^k$, $k = 2, 3, \dots$, (w szczególności klasy $\mathcal{N}_{\mathcal{G}}^S$) - m.in. związki tychże rodzin z rozważanymi w [1] klasami $\mathcal{M}_{\mathcal{G}}^k$, $k = 2, 3\dots$

Literatura

[1] R. Długosz, E. Trybucka, *Embendding theorems and extreme problems for holomorphic functions on circular domains of* $\mathbb{C}^n$, Complex Variables and Elliptic Equations **59** (2014), 883–899.

[2] P. Liczberski, J. Połubiński, *On* (j, k)*-symmetrical functions*, Math. Bohemica **120** (1995), 13–28.

[3] A. Sibelska, *On the class* $\mathcal{N}_{\mathcal{G}}^S$ *of holomorphic functions of several complex variables of the Bavrin type*, Bull. Soc. Sci. Lett. de Łódź, **66** (2016), no. 3, 87–100.

Stanisław SKULIMOWSKI, Marcin BADUROWICZ, Marcin BARSZCZ, Jerzy MONTUSIEWICZ

Politechnika Lubelska (Lublin)

Projektowanie i optymalizacja interaktywnej wizualizacji wirtualnej rzeczywistości

Systemy wirtualnej rzeczywistości (VR - Virtual Reality) są coraz bardziej popularne w różnych aspektach – począwszy od edukacji kompetencji międzykulturowych [1], przez tworzenie wirtualnych muzeów dla celów promocji dziedzictwa kulturowego [2], jednak znacznie mniej miejsca poświęca się celom poprawnego wytwarzania doświadczeń VR [3], które dla swoich użytkowników będą odpowiednio użyteczne i wydajne, bez powodowania negatywnych aspektów przebywania w przestrzeni VR [4].

Artykuł przedstawia proces wytwarzania i optymalizacji wydajności mobilnej aplikacji wirtualnej rzeczywistości dla platformy mobilnej Google VR w postaci multimedialnej prezentacji przestrzeni muzealnej, służącą prowadzonym obecnie przez autorów pracom nad interfejsami użytkownika w systemach rzeczywistości wirtualnej, jak również nad kompetencjami międzykulturowymi studentów programu Erasmus.

Proces wytwarzania aplikacji wymaga uwzględnienia ograniczeń sprzętu i oprogramowania, jak również specyfiki działania urządzeń mobilnych. Obejmuje: planowanie działań i aktywności w przestrzeni wirtualnej, przygotowanie zasobów aplikacji, takich jak modele obiektów muzealnych, implementację obsługi projekcji wirtualnej rzeczywistości, oraz wytworzenie mechanizmów interakcji. W artykule opisano poszczególne kroki rozwoju aplikacji i w szczególności rozwiązania problemów, które wynikły na poszczególnych etapach.

Wytworzona aplikacja została przetestowania pod kątem wydajności, w celu analizy skuteczności zastosowanych metod optymalizacji i zwiększenia stabilności działania prezentowanego rozwiązania.

Uwzględniając wszystkie zaprezentowane elementy, autorzy uważają, że zaprezentowany proces może być przydatny w projektowaniu innych, podobnych, aplikacji wykorzystujących technologię wirtualnej rzeczywistości na urządzeniach mobilnych.

Literatura

[1] S. Skulimowski, J. Montusiewicz, M. Badurowicz, M. Barszcz, *Virtual reality for crosscultural education – a case study*, (pre-print).

[2] M. Carrozzino, M. Bergamasco, *Beyond virtual museums: Experiencing immersive virtual reality in real museums*, Journal of Cultural Heritage **11** (2005), 452–458.

[3] Z. Lai, Y. C. Hu, Y. Cui, L. Sun, N. Dai, H. Lee, *Furion: Engineering High-Quality Immersive Virtual Reality on Today's Mobile Devices*, IEEE Transactions on Mobile Computing 1, 2019.

[4] J. Kim, *Modeling and Optimization of a Tree Based on Virtual Reality for Immersive Virtual Landscape Generation*, Symmetry **8** (2016), 93.

Janusz SOKÓŁ[1], Mamoru NUNOKAWA

[1] *University of Rzeszów* (Rzeszów)

On some extension of Noshiro-Warschawski's theorem

Let $\mathcal{H}$ denote the class of functions analytic in the unit disk $\mathbf{D} = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$. Let $\mathcal{A}$ be the class of functions being in $\mathcal{H}$ and having the form

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad (z \in \mathbf{D}).$$

Let $\mathcal{S}$ denote the subclass of $\mathcal{A}$ consisting of all univalent functions in $\mathbf{D}$. Let $\mathcal{A}_p \subset \mathcal{H}$ be the class of analytic functions of the form

$$f(z) = z^p + \sum_{n=1}^{\infty} a_{p+n} z^{p+n} \quad (z \in \mathbf{D}). \tag{1}$$

So we have $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1$. A function $f(z)$ which is analytic in a domain $D \subset \mathbf{C}$ is called p-valent in D if for every complex number w, the equation $f(z) = w$ have at most p roots in D and there will be a complex number w_0 such that the equation $f(z) = w_0$, has exactly p roots in D.

The well known Noshiro-Warschawski univalence condition (see [1] and [3]) indicates that if $f(z)$ is analytic in a convex domain $D \subset \mathbf{C}$ and

$$\mathfrak{Re}\{e^{i\theta} f'(z)\} > 0 \quad (z \in D)$$

for some real θ, then $f(z)$ is univalent in D. In [2] S. Ozaki extended the above result by showing that if $f(z)$ of the form (1) is analytic in a convex domain D and for some real θ we have

$$\mathfrak{Re}\{e^{i\theta} f^{(p)}(z)\} > 0 \quad (z \in D),$$

then $f(z)$ is at most p-valent in D. We prove

Twierdzenie 1. If $f(z) \in \mathcal{H}$ with $f'(0) = 1$ and if

$$\left|\mathfrak{Re}\{zf''(z)\}\right| \le \alpha |z|^{\alpha} \quad (z \in \mathbf{D})$$

for some $\alpha > 0$, then $f(z)$ is univalent in $\mathbf{D}$.

References

[1] K. Noshiro, *On the theory of schlicht functions*, J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Jap. **2** (1934-35), no. 1, 129–135.
[2] S. Ozaki, *On the theory of multivalent functions*, Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku Sect. A **2** (1935), 167–188.
[3] S. Warschawski, *On the higher derivatives at the boundary in conformal mapping*, Trans. Amer. Math. Soc. **38** (1935), 310–340.

Zbigniew SURAJ[1], Piotr GROCHOWALSKI[2]

[1,2] *University of Rzeszów* (Rzeszów)

On Pawlak's Numbers and Collaboration Graph

In the era of rapidly growing internet technology, one can observe the existence of many software systems for various purposes. Some of the systems are used to collect data. One of them is the Rough Set Database System (the RSDS system for short) [3]. This system was designed and made in the basic version in 2002 by a research group from the University of Rzeszów. It is systematically expanded with new functionalities and enriched with new data. So far, 42 003 authors and 37 423 descriptions of publications have been gathered in the system. These numbers are increasing every year. The RSDS system is also treated as a kind of "visiting card" of the International Rough Set Society (abbreviated IRSS) [1]. IRSS brings together scientists from several dozen countries involved in the development of theories and applications of rough sets. The rough set theory was proposed in 1982 by Zdzisław Pawlak (1926-2006), a Polish mathematician and computer scientist, a real member of the Polish Academy of Sciences [2].

Since the beginning of the RSDS system, it has collected data on publication descriptions, their authors and software supporting the application of rough set theory and related approaches in practice. This system, in addition to its basic purpose, allows to examine the links between authors of publications, the strength of such links and extract other information hidden in the data, including the scientific activity and publication fertility of the authors [5]. One of the determinants characterizing such connections is the so-called Pawlak number [4],[6]. It is essentially an index that determines the strength of a given author's relationship with Z. Pawlak. The basis for determining this index is the so-called collaboration graph, i.e., a graph in which two authors existing in the RSDS system connect the edge when they are co-authors of a joint publication (possibly with other co-authors also present in this system).

References

[1] *International Rough Set Society*; https://www.roughsets.org/roughsets/publications/

[2] Z. Pawlak, *Rough sets*, International Journal of Information and Computer Sciences **11** (1982), no. 5, 341–356.

[3] Z. Suraj, P. Grochowalski, *About new version of RSDS system*, Fundamenta Informaticae **135** (2014), no. 4, 503–519; http://www.rsds.ur.edu.pl/home

[4] Z. Suraj, P. Grochowalski, Ł. Lew, *Pawlak Collaboration Graph and Its Properties*, Lecture Notes in Computer Science, 6743, Springer, Berlin, pp. 365–368, 2011.

[5] Z. Suraj, P. Grochowalski, Ł. Lew, *Discovering Patterns of Collaboration in Rough Set Research: Statistical and Graph-Theoretical Approach*, Lecture Notes in Computer Science, 6954, Springer, Berlin, pp. 238–247, 2011.

[6] Z. Suraj, P. Grochowalski, Ł. Lew, *Pawlak Collaboration Graph of the Second Kind and Its Properties*, Proceedings of International Workshop on Concurrency, Specification and Programming (CS&P 2011), Pułtusk, September 28-30, 2011, pp. 512–522.

Z. SURAJ[1], O. OLAR[2], Y. BLOSHKO[3]

[1] *University of Rzeszów* (Poland)
[2,3] *Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University* (Ukraine)

Hierarchical Fuzzy Petri Nets for Solving Passenger Transport Logistics Problem

In the paper [1] was a proposal of using fuzzy Petri net for making a decision of what type of transport is the best for the given user's input features. What is more, there appeared a question of what transport company is the best based on the decision of the best type of transport. In the paper [2] was a proposal of dividing a full model into sub-models and this approach was tested in the PNeS software [3]. In conclusion, it was decided that this method can be applied with the use of hierarchical fuzzy Petri nets.

The idea is the following: there is the main model that results with three main types of transport that are the beginning for three new models which are sub-models of the main one. According to this structure, when there is a decision on what type of transport is the best, it is possible to choose only one following model out of three. Therefore, we got a reduction of two unused models and therefore saved the time. In the same manner, there can be additional sub-models for the current sub-models that will include knowledge and options about classes of comfort for each transport company (e.g. Economy, Premium, Business class) if it is applicable. Again, there will be applied only one model that was activated by the highest result of the output place on the final stage of the last model. By the request, in the same manner, new models can be added in accordance to the input information.

This methodology allows creating an enormous fuzzy Petri net model that will only use (consider) data which can be applied on the next step. In this way, at each level of calculations, PNeS with its models uses less computer resources and time. All unused data, because of low results after calculations, is not taken into consideration. The benefit of this methodology is that it has no limit on the input information and the model rapidly reduces itself resulting in the time-saving.

References

[1] Z. Suraj, O. Olar, Y. Bloshko, *Conception of Fuzzy Petri Net to Solve Transport Logistics Problems*, [in:] A. Lecko (ed.), *Current Research in Mathematical and Computer Sciences II*, Publisher UWM, Olsztyn, Poland, 2018, pp. 303–313.

[2] Z. Suraj, O. Olar, Y. Bloshko, *Optimized Fuzzy Petri Nets and Their Application for Transport Logistics Problem*, Proc. Int. Workshop on Concurrency, Specification and Programming (CS&P 2019), September 24–26, 2019, Olsztyn, Poland.
[3] Z. Suraj, P. Grochowalski, *Petri Nets and PNeS in Modeling and Analysis of Concurrent Systems*, Proc. Int. Workshop on Concurrency, Specification and Programming (CS&P 2017), September 25-27, 2017, Warsaw, Poland, pp. 1-12.

Anna SZPILA

Uniwersytet Rzeszowski (Rzeszów)

O pewnych podklasach funkcji prawie wypukłych

Przedmiotem prezentacji będzie porównanie własności zachodzących dla dwóch podklas klasy funkcji prawie wypukłych. Rozważana będzie klasa $\mathcal{K}_{mS}$ funkcji analitycznych $f \in \mathcal{A}$, gdzie $\mathcal{A}$ oznacza klasę wszystkich funkcji analitycznych w kole jednostkowym $\mathbf{U} = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ standardowo unormowanych, dla których istnieje funkcja $g \in \mathcal{A}$ taka, że

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zg'(z)}{g(z)}\right\} > \frac{m-1}{m}, \quad z \in \mathbf{U},$$

spełniających warunek

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{z^m f'(z)}{(-1)^{m-1}\prod_{k=0}^{m-1} g(\varepsilon^j z)}\right\} > 0, \quad z \in \mathbf{U},$$

przy czym $\varepsilon = \exp\frac{2\pi i}{m}$. Funkcje z tej klasy są więc powiązane z funkcjami gwiaździstymi m-symetrycznymi.

Niech m będzie ustaloną liczbą naturalną. Przez $\mathcal{S}^*(m)$ oznaczamy następującą podklasę funkcji gwiaździstych:

$$\mathcal{S}^*(m) = \left\{f \in A : \frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{1+z^m}{1-z^m},\ z \in \mathbf{U}\right\}.$$

Drugą rozważaną podklasą funkcji prawie wypukłych będzie rodzina $\mathcal{K}(m)$, $m \in \mathbf{N}$, zdefiniowana w następujacy sposób

$$\mathcal{K}(m) = \left\{f \in A : \bigvee_{G \in \mathcal{S}^*(m)} \operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{G(z)} > 0,\ z \in \mathbf{U}\right\}.$$

Pomimo niektórych zbieżnych własności dla przedstawionych klas, $\mathcal{K}(m) \neq \mathcal{K}_{mS}$.

Literatura

[1] P. L. Duren, *Univalent functions*, Springer-Verlag, New York, 1983.
[2] Ch. Gao, S. Zhou, *On a class of analytic functions related to the starlike functions*, Kyungpook Math. J. **45** (2005), 123–130.
[3] R. Jurasińska, A. Szpila, *The classes of functions which can be defined by subordinations*, Folia Sci. Univ. Techn. Resov. **22** (1998), 41–49.
[4] A. Szpila, *On some classes of analytic functions related to starlike functions with m-fold symmetry*, Sci. Bull. of Chelm, Math and Comp. Sci. **1** (2007), 191–196.
[5] A. Szpila, *Close-to-convex functions related to functions defined by subordination* $\frac{1+z^m}{1-z^m}$, Sci. Bull. of Chelm, Math and Comp. Sci **2** (2007), 77–83.

Katarzyna TRĄBKA-WIĘCŁAW[1], Paweł ZAPRAWA[2]

[1,2]*Politechnika Lubelska* (Lublin)

O funkcjonałach typu Fekete-Szegö dla funkcji prawie wypukłych

Niech $\mathcal{A}$ oznacza klasę funkcji analitycznych i unormowanych klasycznie w kole jednostkowym $\Delta = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$, zaś $\mathcal{S}^*$ - klasę funkcji gwiaździstych w $\mathcal{A}$.

Dla ustalonego $\beta \in (-\pi/2, \pi/2)$ i $g \in \mathcal{S}^*$, funkcję $f \in \mathcal{A}$ nazywamy prawie wypukłą względem g z argumentem β (close-to-convex with argument β with respect to g), jeśli

$$\mathfrak{Re}\left\{\frac{e^{i\beta} z f'(z)}{g(z)}\right\} > 0, \quad z \in \Delta. \tag{1}$$

Niech $\mathcal{C}_\beta(g)$ będzie klasą takich funkcji.

Rozważmy klasę $\mathcal{C}_0(k)$, gdzie k jest funkcją Koebego

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}, \quad z \in \Delta.$$

Wtedy nierówność (1) przyjmuje postać

$$\mathfrak{Re}\left\{(1-z)^2 f'(z)\right\} > 0, \quad z \in \Delta.$$

Dla funkcji $f \in \mathcal{A}$ definiujemy dwa funkcjonały dla ustalonego μ rzeczywistego:

$$\Theta_f(\mu) = a_4 - \mu a_2 a_3 \quad \text{oraz} \quad \Phi_f(\mu) = a_2 a_4 - \mu {a_3}^2.$$

Funkcjonały $\Theta_f(\mu)$ i $\Phi_f(\mu)$ są uogólnieniami dwóch dobrze znanych wyrażeń: $a_4 - a_2 a_3$ i $a_2 a_4 - {a_3}^2$. Funkcjonały te nazywamy funkcjonałami typu Fekete-Szegö ze względu na konstrukcję podobną do znanego funkcjonału Fekete-Szegö postaci $a_3 - \mu {a_2}^2$, $\mu \in \mathbf{R}$.

Uzyskane zostały oszacowania funkcjonałów typu Fekete-Szegö $\Theta_f(\mu)$ i $\Phi_f(\mu)$ w klasie funkcji $\mathcal{C}_0(k)$. Rezultaty te są dokładne dla pewnych wartości μ. W szczególnym przypadku otrzymujemy:

$$|a_4 - a_2 a_3| \le 2 \quad \text{oraz} \quad |a_2 a_4 - {a_3}^2| \le 1.$$

Bronisław WAJNRYB

Politechnika Rzeszowska (Rzeszów)

Problemy aproksymacji i wielomiany ze znikającym Hessianem

Przestrzeń wielomianów jest gęsta w przestrzeni $C(\mathbf{R}^d)$ wszystkich funkcji ciągłych w $\mathbf{R}^d$ w topologii zbieżności jednostajnej na zbiorach zwartych.

Dla ustalonego wielomianu $f(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ rozważmy mniejszą przestrzeń indukowaną przez ten wielomian $P(f) = span(\{f(x_1 - a_1, x_2 - a_2, \ldots, x_d - a_d)^k : a_i \in \mathbf{R},\ k \in \mathbf{Z}_+\})$.

Czy $P(f)$ jest gęste w $C(\mathbf{R}^d)$?

Warunkiem koniecznym jest aby pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ były liniowo niezależne. Czy to jest warunek dostateczny?

Okazuje się, że wystarczy rozważać przypadek gdy f jest wielomianem quasi-jednorodnym. W tym wypadku warunkiem dostatecznym jest aby pochodne cząstkowe wielomianu f były algebraicznie niezależne a to oznacza, że wyznacznik Hessianu det $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ wielomianu f nie znika tozsamościowo.

Czy to jest też warunek konieczny?

To zależy od wymiaru d rozważanej przestrzeni.

Literatura

[1] L. Auslander, *Differential Geometry*, Harper and Row, New York, 1976.

[2] P. Gordan, M. Noether, *Über die Algebraischen Formen, deren Hesse'sche Determinante identisch verschwindet*, Math. Annalen **10** (1876), 547–568.

[3] O. Hesse, *Über die Bedingung, unter welcher eine homogene ganze Function von n unabhängigen Variabeln durch lineäre Substitutionen von n andern unabhängigen Variabeln auf eine homogene Function sich zurückführen läßt, die eine Variable weniger enthält*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **42** (1851), 117–124.

[4] W. M. Tichomirov, *A. N. Kolmogorov i teoria aproksymacji*, Uspehi Matematiczeskich Nauk **44** (1989), 83–122.

[5] A. G. Vitushkin, *On representation of functions by means of superpositions and related topics*, L'Enseignement Math. **23** (1977), 255–320.

Maja WENDERLICH-PINTAL

Akademia Pedagogiki Specjalnej im. Marii Grzegorzewskiej w Warszawie (Warszawa)

Kamienie milowe w przebiegu karier życiowych wybitnych matematyków i uzdolnionej matematycznie młodzieży

W swojej prezentacji przedstawię wyniki badań dotyczące kamieni milowych (wydarzeń znaczących, punktów krytycznych, doświadczeń krystalizujących) w biegu życia wybitnych matematyków i uzdolnionej matematycznie młodzieży. Moim zamiarem jest wskazanie osób, rzeczy, sytuacji wraz z całym kontekstem, które miały bezpośredni związek z ukierunkowaniem ich umysłu w stronę matematyki. Ciekawą, a zarazem ważną informacją z punktu widzenia edukacji matematycznej oraz rozwoju zdolności matematycznych jest stwierdzenie, czy owe kamienie milowe są stałe czy zmieniają się w zależności od danego okresu. Swoje rozważania opieram o holistyczne, humanistyczne podejście oraz metodę biograficzną w ujęciu Charlotte Bühler. Badania zostały zrealizowane w ramach rozprawy doktorskiej, obronionej w 2018 roku na Akademii Pedagogiki Specjalnej.

Agnieszka WIŚNIOWSKA-WAJNRYB

Rzeszow University of Technology (Rzeszów)

Uniformly starlike functions and subclasses of convex functions

Let S denote the class of all functions f that are analytic and univalent in the open unit disk $\mathbf{U} = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ and normalized by $f(0) = f'(0) - 1 = 0$.

In 1991 Goodman ([1]) introduced geometrically defined class UST of uniformly starlike functions. Recall that a function $f \in S$ is in the class UST if for every circular arc $\gamma \subset \mathbf{U}$ with center $\zeta \in \mathbf{U}$, the arc $f(\gamma)$ is starlike with respect to $f(\zeta)$. The class UST can be characterized as follows

$$f \in UST \Leftrightarrow \operatorname{Re} \frac{f(z) - f(\zeta)}{(z - \zeta) f'(z)} \geq 0 \quad \text{for all} \quad z, \zeta \in \mathbf{U}.$$

It is difficult to investigate the class UST because of its characterization in terms of two complex variables. In particular checking whether a function belongs to the class UST leads to very complicated computations. Hence only simple examples of uniformly starlike functions are known.

We prove the theorem which generates many examples of uniformly starlike functions and we establish its connections with some subclasses of convex functions. For instance, we get that all functions convex of order $3/4$ are uniformly starlike.

References

[1] A. W. Goodman, *On uniformly starlike functions*, J. Math. Anal. Appl. **155** (1991), 364–370.

[2] E. Merkes, M. Salmassi, *Subclasses of uniformly starlike functions*, Internat. J. Math. & Math. Sci. **15** (1992), 449–454.

[3] A. Wiśniowska-Wajnryb, *A survey on k-uniformly starlike functions*, [in:] A. Lecko (ed.), *Current Research in Mathematical and Computer Sciences*, Publisher UWM, Olsztyn, 2017, pp. 225–232.

[4] A. Wiśniowska-Wajnryb, *On classes of uniformly starlike functions*, Ann. Polon. Math. **108** (2013), no. 1, 11–19.

Wiesław WÓJCIK

Uniwersytet Humanistyczno-Przyrodniczy Im. Jana Długosza w Częstochowie (Częstochowa)

Programy badawcze Hugona Steinhausa i ich realizacja

Hugo Steinhaus (1887—1972) był współtwórcą lwowskiej szkoły matematycznej oraz wrocławskiej szkoły zastosowań matematyki. Czerpał w dużej mierze ze szkoły getyńskiej (F. Klein, D. Hilbert) oraz francuskiej (H. Lebesgue). Stworzył wiele programów badawczych w ramach matematyki, badania jej podstaw oraz zastosowań, do realizacji których włączył wielu polskich matematyków. Kluczowy jest program badania podstaw różnych teorii (nie tylko matematycznych) poprzez poszukiwanie najbardziej optymalnej aksjomatyzacji i formalizacji i sytemu uogólnionych pojęć. To dało impuls i możliwości powstania i rozwoju kilku nowych teorii matematycznych. Kolejnym był program pokazywania zastosowań matematyki oraz jej obecności w rzeczywistości (zawarty był tutaj program wizualizacji matematyki, w tym edukacyjny program Archimedesa oraz idea uniwersalności matematyki). Zaproponował i rozpoczął badania nad szeregami trygonometrycznymi (Aleksander Rajchman, Stefan Kaczmarz) oraz analizą funkcjonalną (Stefan Banach), kluczowe dla lwowskiej szkoły. Następnym zagadnieniem były badania nad teorią miary i jej miejscem w innych dziedzinach wiedzy. Najważniejszym w ramach tych badań była matematyzacja teorii prawdopodobieństwa przy pomocy teorii mnogości i teorii miary. Te badania doprowadziły do sformułowania pojęcia funkcji niezależnych stochastycznie i badanie ich miejsca i znaczenia w różnych obszarach matematyki (nie tylko w teorii prawdopodobieństwa). Te badania podjął i rozwijał jego uczeń Mark Kac. Steinhaus rozpoczął również prace nad matematyzacją teorii gier. W roku 1925 wydaje pracę Definicje potrzebne do teorii gry i pościgu, w której podaje formalną definicję pojęcia strategii oraz rozważa abstrakcyjną formę funkcji zapłaty. Wraz z B. Knasterem i S. Banachem rozważają problem „sprawiedliwego podziału” w pracy The problem of fair division. We wspomnianych pracach (i wielu innych) wykorzystuje metodę „analogii matematycznej” do ukazania związków między czasem bardzo odległymi intuicyjnie dziedzinami. W ten sposób pokazuje związki przykładowo pomiędzy teorią miary, topologią, teorią mnogości i wspomnianą teorią gier. Charakterystycznym przykładem jest praca A mathematical axiom contradicting the axiom of choice (1962, wspólna z J. Mycielskm), która pokazuje możliwość wykorzystania „aksjomatu determinacji” (sformułowanego w ramach pomocy teorii gier) do budowania alternatywnej („słabszej”, lecz nie generującej istnienia zbiorów niemierzalnych) teorii mnogości.

Józef ZAJĄC

Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa w Chełmie (Chełm)

Odwzorowania harmoniczne w aerodynamice

Przedstawiona będzie metoda badania pewnych zjawisk jakie występują w czasie przepływu gazu w rurze. Polega ona na zastosowaniu dwuwymiarowych odwzorowań harmonicznych do opisu zmian pozycji cząsteczki notowanych na stosownie dobranych przekrojach poprzecznych rury. Uzasadnione powyższą koniecznością wprowadzenie unormowanych brzegowo odwzorowań harmonicznych koła jednostkowego na siebie otworzyło listę nowych problemów badawczych. Ich postać ma niekiedy formę charakterystyczną tylko dla tej klasy i może stanowić motywację nowych badań zaczynając od tych najbardziej elementarnych. Prace takie prowadzone są od kilku lat w ramach Chełmskiego Seminarium Matematycznego. Niektóre z otrzymanych tam wyników będą prezentowane w trakcie niniejszej prezentacji.

Mykhaylo ZARICHNYY

University of Rzeszów (Rzeszów)

Topology of spaces of persistence diagrams

Topological Data Analysis (TDA) is a part of applied mathematics concentrated around investigations of large data sets by means of topological and metric methods. Persistent homology is one of the most important tools in DNA.

The persistence homology can be uniquely represented by the persistence diagrams [1]. There are natural metrics (e.g., bottleneck metric and Wasserstein metrics) and topologies on the set of persistence diagrams and one of the aims of the talk is to consider topological and metric properties of the obtained spaces.

We apply methods of infinite-dimensional topology to the metric spaces of persistence diagrams. In particular, we detect some pairs homeomorphic to $(\ell^2, \ell^2_{\mathrm{f}})$ in the topology of (completed) spaces of persistence diagrams.

We also consider some recent publications concerning coarse geometric properties of the metric spaces of persistence diagrams (see, e.g., [2]) and formulate some new results in this direction.

References

[1] A. Zomorodian, G. Carlsson, *Computing persistent homology*, Discrete Comput. Geom. **33** (2005), no. 2, 249–274.

[2] G. Bell, A. Lawson, C. Neil Pritchard, D. Yasaki, *The space of persistence diagrams fails to have Yu's property A*, arXiv:1902.02288.

MIROSŁAWA ZIMA

Uniwersytet Rzeszowski (Rzeszów)

Stabilność rozwiązań okresowego zagadnienia brzegowego

Omówimy stabilność w sensie Lapunowa rozwiązań następującego zagadnienia brzegowego

$$\begin{cases} x''(t) = r(t)x^{\alpha}(t) - s(t)x^{\beta}(t), \quad t \in [0,T], \\ x(0) = x(T), \quad x'(0) = x'(T). \end{cases}$$

Przedstawimy główne wyniki zawarte w pracy [1], uzyskane w oparciu o metodę uśredniania i metodę aproksymacji trzeciego rzędu.

LITERATURA

[1] F. Wang, J. A. Cid, S. Li, M. Zima, *Lyapunov stability of periodic solutions of Brillouin type equations*, praca przyjęta do druku w Appl. Math. Lett.

LISTA UCZESTNIKÓW

MARCIN BARSZCZ
Politechnika Lubelska

YURII BLOSHKO
Yurii Fedkovych Chernivtsi National University

PIOTR BŁASZCZYK
Uniwersytet Pedagogiczny im. Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie

AGNIESZKA BOJARSKA-SOKOŁOWSKA
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

YAROSLAV CHABANYUK
Politechnika Lubelska

JACEK CHUDZIAK
Uniwersytet Rzeszowski

MAŁGORZATA CHUDZIAK
Uniwersytet Rzeszowski

RENATA DŁUGOSZ
Politechnika Łódzka

STANISŁAW DOMORADZKI
Uniwersytet Rzeszowski

PIOTR DRYGAŚ
Uniwersytet Rzeszowski

PAWEŁ DRYGAŚ
Uniwersytet Rzeszowski

JACEK DZIOK
Uniwersytet Rzeszowski

MARLENA FILA
Uniwersytet Pedagogiczny im. Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie

MAGDALENA GREGORCZYK
Politechnika Lubelska

Piotr Jastrzębski
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

Sylwia Kania
Uniwersytet Śląski

Leopold Koczan
Politechnika Lubelska

Mikhail Kolev
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

Bogumiła Kowalczyk
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

Grzegorz Kowalczyk
Szkoła Podstawowa nr 8 im. Jana Pawła II w Policach

Jacek Kucab
Uniwersytet Rzeszowski

Adam Lecko
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

Piotr Liczberski
Politechnika Łódzka

Julian Ławrynowicz
Uniwersytet Łódzki / Instytut Matematyczny PAN

Ołeh Łopuszański
Uniwersytet Rzeszowski

Svetlana Mincheva-Kamińska
Uniwersytet Rzeszowski

Małgorzata Nowak-Kępczyk
Katolicki Uniwersytet Lubelski Jana Pawła II

Antoni Pardała
Politechnika Rzeszowska

Maciej Parol
Katolicki Uniwersytet Lubelski Jana Pawła II

Dariusz Partyka
Katolicki Uniwersytet Lubelski Jana Pawła II

Anna Petiurenko
Uniwersytet Pedagogiczny im. Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie

Barbara Pękala
Uniwersytet Rzeszowski

Krzysztof Piejko
Politechnika Rzeszowska

Oleksandr Provotar
Narodowy Uniwersytet im. Tarasa Szewczenki w Kijowie

Agnieszka Prusińska
Uniwersytet Przyrodniczo-Humanistyczny w Siedlcach

Wojciech Rosa
Politechnika Lubelska

Agnieszka Sibelska
Uniwersytet Łódzki

Stanisław Skulimowski
Politechnika Lubelska

Janusz Sokół
Uniwersytet Rzeszowski

Zbigniew Suraj
Uniwersytet Rzeszowski

Anna Szpila
Uniwersytet Rzeszowski

Katarzyna Trąbka-Więcław
Politechnika Lubelska

Lucyna Trojnar-Spelina
Politechnika Rzeszowska

Edyta Trybucka
Uniwersytet Rzeszowski

Dov Bronisław Wajnryb
Politechnika Rzeszowska

Maja Wenderlich-Pintal
Akademia Pedagogiki Specjalnej im. Marii Grzegorzewskiej w Warszawie

Agnieszka Wiśniowska-Wajnryb
Politechnika Rzeszowska

Wiesław Wójcik
Uniwersytet Humanistyczno-Przyrodniczy im. Jana Długosza w Częstochowie

Józef Zając
Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa w Chełmie

Paweł Zaprawa
Politechnika Lubelska

Mykhaylo Zarichnyy
Uniwersytet Rzeszowski

Mirosława Zima
Uniwersytet Rzeszowski