Co i czym można skonstruować

Jarosław Kosiorek

5 maja 2016

Co można skonstruować?

Mając dany odcinek długości 1 można skonstruować:

1. odcinek długości równej dowolnej liczbie wymiernej dodatniej;
2. odcinek długości $p = \sqrt{q}$ przy danym odcinku długości q.

Liczy konstruowalne

Def. 1. *Liczby konstruowalne* to wszystkie liczby, które można otrzymać z liczby 1 za pomocą działań dodawania, odejmowania, mnożenia dzielenia i wyciągania pierwiastka kwadratowego.

1. $a + b\sqrt{q}$, gdzie a, b są wymierne, a $\sqrt{q}$ jest niewymierny,
2. $c + d\sqrt{e}$, gdzie c, d, e są takie jak w pkt. pierwszym, a $\sqrt{e}$ już nie,
3. itd., przykładowo: $2 + 3\sqrt{2}$, $2 + 5\sqrt{2 + 3\sqrt{2}}$, $1 + 3\sqrt{2 + 5\sqrt{2 + 3\sqrt{2}}}$.

Zadania starożytnych i Pierre Laurent Wantzel (1814-1848)

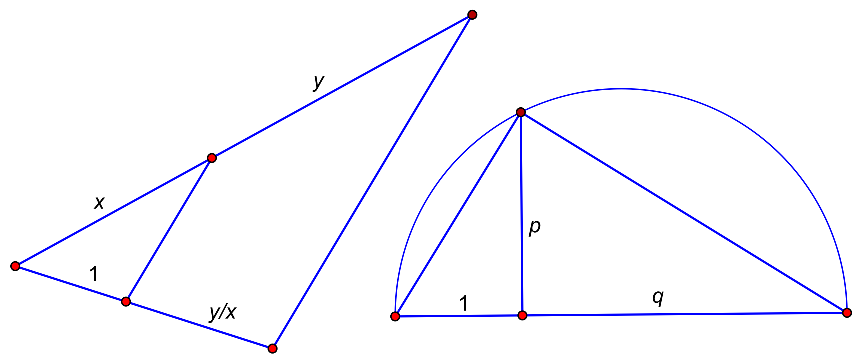
Trzy słynne zadania starożytnych:

- Podwojenie sześcianu: Mając dany sześcian, skonstruować krawędź sześcianu o dwukrotnie większej objętości.
- Trysekcja kąta: Podzielić dany kąt na trzy kąty przystające.
- Kwadratura koła: Skonstruować kwadrat o takim samym polu jak dane koło.

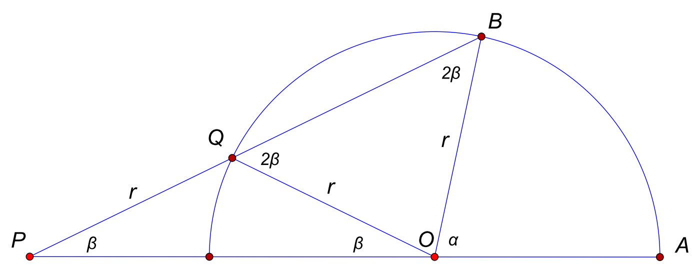
Twierdzenie 1 (Wantzela)**.** *Jeżeli dana liczba jest konstruowalna za pomocą cyrkla i linijki, to jest ona pierwiastkiem pewnego wielomianu o współczynnikach wymiernych, którego stopień jest potęgą liczby 2.*

Przykładowo: $2 + 3\sqrt{2}$ jest pierwiastkiem wielomianu $x^2 - 4x - 14$.

Wn. 1. *Podwojenia sześcianu, kwadratury koła i trysekcji dowolnego kąta nie można wykonać za pomocą cyrkla i linijki.*



Rysunek 1: Konstrukcje ilorazu i pierwiastka



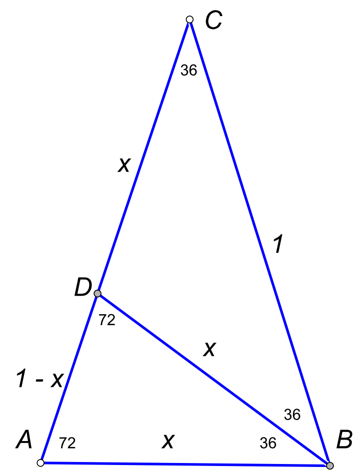
Rysunek 2: Trysekcja kąta za pomocą cyrkla i linijki z zaznaczonymi dwoma punktami

Trysekcja dowolnego kąta za pomocą cyrkla i linijki z zaznaczonymi dwoma punktami PQ

1. Kreślimy okrąg o środku O i promieniu PQ, który przecina ramiona kąta w punktach A i B.
2. Linijkę przykładamy w ten sposób do punktu B, że P znajduje się na przedłużeniu ramienia OA, a Q na okręgu.
3. Kąt APB ma miarę równą jednej trzeciej miary kąta AOB.

Liczby pierwsze Fermata i konstrukcje n-kątów

$$F_i = 2^{2^k} + 1$$



Rysunek 3: Wyznaczenie długości boku dziesięciokąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1

$F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65537$ $F_5 = 4294967297$ nie jest liczbą pierwszą (Euler, 1732). $4294967297 = 641 \cdot 6700417$. Dotąd nie wiadomo, czy są inne liczby pierwsze Fermata.

Twierdzenie 2 (Gaussa-Wantzela, 1801/1837)**.** *n-kąt foremny jest konstruowalny wtedy i tylko wtedy, gdy*

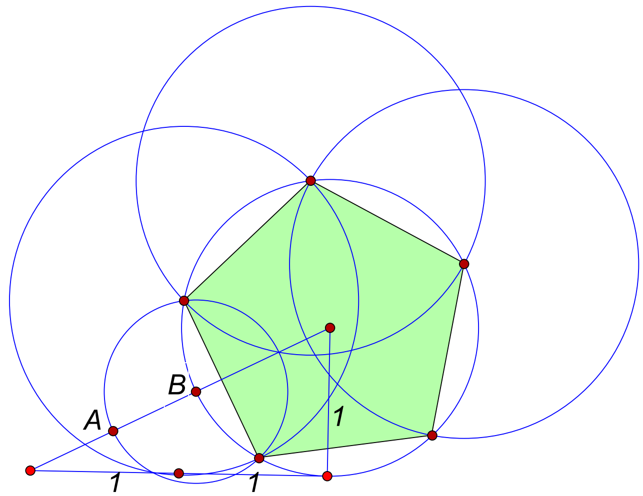
$$n = 2^k \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_l$$

gdzie $p_1, p_2, \ldots, p_l$ są różnymi liczbami pierwszymi Fermata.

17-kąt - Gauss (1796) 257-kąt - Richelot i Schwendenwein (1832) 65537-kąt - Johann Gustav Hermes (1894)

Konstrukcja pięciokąta foremnego (Rys. 3)

- $$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$$
- $$x^2 + x - 1 = 0; \quad \Delta = 5; \quad x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$
- długość boku dziesięciokąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1 jest równa
$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2};$$



Rysunek 4: Konstrukcja pięciokąta $|AB| = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

- $$\varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{x}$$

  nazywana jest *złotym podziałem* (całość do dłuższej ma się tak, jak dłuższa do krótszej).

- długość boku pięciokąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1

  $$y = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$

Twierdzenie Mohra (1672), Mascheroniego (1797)

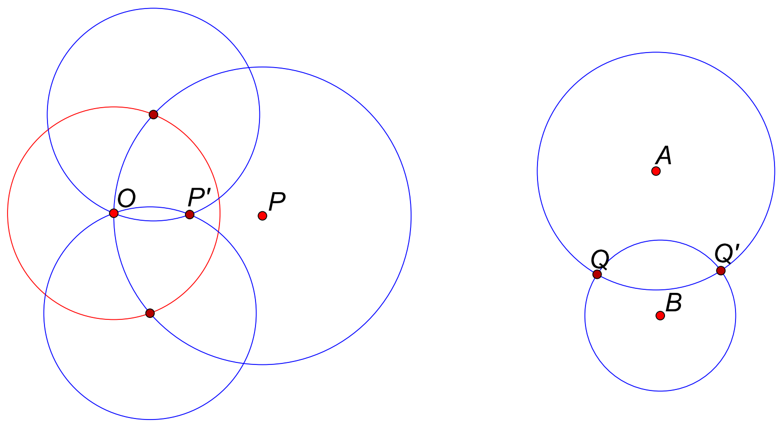
Twierdzenie 3 (Mohra-Mascheroniego)**.** *Dowolną konstrukcję wykonalną za pomocą cyrkla i liniału można przeprowadzić za pomocą samego cyrkla, jeśli prostą uważamy za daną gdy dane są dwa różne jej punkty.*

Def. 2. *Inwersją* (*symetrią względem okręgu*) o środku O i promieniu r nazywamy przekształcenie, które dowolnemu punktowi $X \neq O$ przyporządkowuje taki punkt X' półprostej OX, że

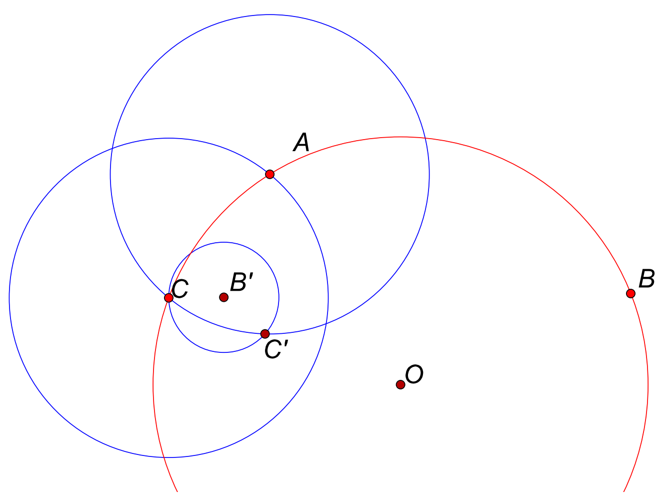
$$|OX'| \cdot |OX| = r^2.$$

Twierdzenie 4. *Inwersja przeprowadza proste, które nie przechodzą przez jej środek w okręgi.*

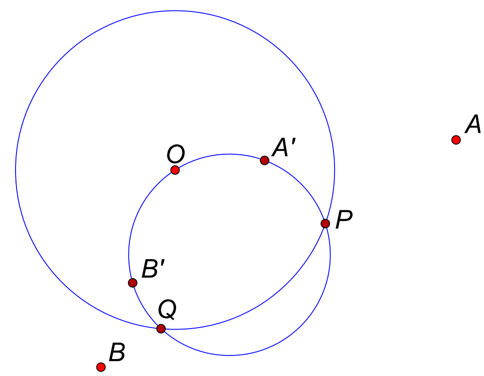
Konstrukcje do dowodu Twierdzenia Mohra-Mascheroniego:



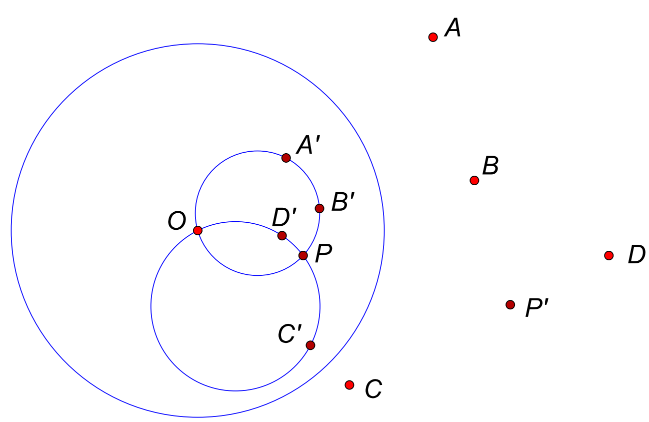
Rysunek 5: Obraz punktu P w inwersji względem czerwonego okręgu i punktu Q w symetrii względem prostej AB



Rysunek 6: Wyznaczenie okręgu przechodzącego przez A,B,C. Za pomocą inwersji o środku C i promieniu $|AC|$ przeprowadzamy szukany okrąg w prostą AB'. Środek szukanego okręgu jest obrazem w tej inwersji punktu C' symetrycznego do C względem AB'.



Rysunek 7: Przecięcie okręgu prostą AB. Prostą przeprowadzamy w okrąg przechodzący przez O, A', B'.



Rysunek 8: Przeciecie prostych AB i CD. Proste przeprowadzamy w okręgi. Ich punkt przecięcia jest obrazem punktu przecięcia okręgów.

Plan konstrukcji pięciokąta foremnego za pomocą samego cyrkla

1. na okręgu o środku O promieniu r odkładamy kolejno punkty A, B, C, D promieniem r;
2. wyznaczamy punt E przecięcia okręgów o środkach A, D i promieniu $|AC|$
3. wyznaczamy środek Q łuku BC przecinając wyjściowy okrąg łukiem o środku A i promieniu $|OE|$;
4. odkładając promień r z punktu Q wyznaczamy środki P, R łuków AB i CD odpowiednio.
5. wyznaczamy punkt S przecięcia łuków zakreślonych z punktów P i R promieniem $|AQ|$ w stronę środka okręgu.
6. $|AS|$ jest długością boku pięciokąta foremnego wpisanego w okrąg.

Twierdzenie Ponceleta (1822), Steinera (1833)

Twierdzenie 5 (Ponceleta-Steinera)**.** *Jeśli dana konstrukcja jest wykonalna za pomocą cyrkla i linijki, to jest ona wykonalna za pomocą samej linijki, o ile dany jest na płaszczyźnie pewien okrąg wraz ze środkiem.*