Po co kolorujemy grafy ?

Aleksandra Kislak-Malinowska

University of Warmia and Mazury, Olsztyn, Poland

Olsztyn, 9.06.2016

Problem

Szkoła oferuje następujące zajęcia dodatkowe do wyboru:

- gotowanie
- szachy
- tańce
- chór
- karate

Problem

Szkoła oferuje następujące zajęcia dodatkowe do wyboru:

- gotowanie
- szachy
- tańce
- chór
- karate

Ania chce chodzić na tańce i szachy, Basia na szachy i gotowanie, Czarek na karate i chór, Darek na szachy i chór, Emilka na tańce i chór.

Problem

Szkoła oferuje następujące zajęcia dodatkowe do wyboru:

- gotowanie
- szachy
- tańce
- chór
- karate

Ania chce chodzić na tańce i szachy, Basia na szachy i gotowanie, Czarek na karate i chór, Darek na szachy i chór, Emilka na tańce i chór.

Do każdych zajęć w szkole jest specjalna pracownia. Teoretycznie zajęcia mogą odbywać się w tym samym czasie.

Problem

Szkoła oferuje następujące zajęcia dodatkowe do wyboru:

- gotowanie
- szachy
- tańce
- chór
- karate

Ania chce chodzić na tańce i szachy, Basia na szachy i gotowanie, Czarek na karate i chór, Darek na szachy i chór, Emilka na tańce i chór.

Do każdych zajęć w szkole jest specjalna pracownia. Teoretycznie zajęcia mogą odbywać się w tym samym czasie.

Jak ustalić grafik, żeby zajęcia odbyły się możliwie wcześnie, ale tak, aby wszyscy zainteresowani mogli w nich uczestniczyć?

Definicja

Kolorowaniem grafu G k- kolorami $(k \geq 1)$ nazywamy funkcję $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, ..., k\}$, taką że dla każdej krawędzi $xy \in E(G)$, $c(x) \neq c(y)$.

Definicja

Liczbą chromatyczną grafu G nazywamy najmniejszą liczbę k, taką że G jest k -kolorowalny. Oznaczamy ją $\chi(G)$.

Definicja

Funkcją chromatyczną grafu G nazywamy funkcję $P_G(k)$, taką że dla każdego $k \geq 1$, $P_G(k)$ jest liczbą wszystkich kolorowań $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, ..., k\}$.

Definicja

Funkcją chromatyczną grafu G nazywamy funkcję $P_G(k)$, taką że dla każdego $k \geq 1$, $P_G(k)$ jest liczbą wszystkich kolorowań $c : V(G) \to \{1, 2, ..., k\}$.

Przykłady

- $G = N_n$ to $P_G(k) = k^n$
- $G = T_n$ to $P_G(k) = k(k-1)^{n-1}$
- $G = K_n$ to $P_G(k) = k(k-1)...(k-n+1)$

Definicja

Funkcją chromatyczną grafu G nazywamy funkcję $P_G(k)$, taką że dla każdego $k \geq 1$, $P_G(k)$ jest liczbą wszystkich kolorowań $c : V(G) \to \{1, 2, ..., k\}$.

Przykłady

- $G = N_n$ to $P_G(k) = k^n$
- $G = T_n$ to $P_G(k) = k(k-1)^{n-1}$
- $G = K_n$ to $P_G(k) = k(k-1)...(k-n+1)$

Fakt

$\chi(G) = min\{k : P_G(k) \neq 0\}$.

Twierdzenie

Niech G będzie grafem prostym i niech $e \in E(G)$. Wtedy $P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G\setminus e}(k)$.

Wielomiany chromatyczne

Twierdzenie

Niech G będzie grafem prostym i niech $e \in E(G)$. Wtedy $P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G \setminus e}(k)$.

Wniosek

Funkcja chromatyczna grafu prostego jest wielomianem.

Twierdzenie

Niech G będzie grafem prostym i niech $e \in E(G)$. Wtedy $P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G\setminus e}(k)$.

Wniosek

Funkcja chromatyczna grafu prostego jest wielomianem.

Uwagi - własności $P_G(k)$

Graf G ma n wierzchołków i m krawędzi,

- $P_G(k)$ jest wielomianem stopnia n
- współczynnik przy k^n jest równy 1.
- współczynnik przy k^{n-1} jest równy $-m$.
- kolejne współczynniki mają przeciwne znaki.