KARIERA MATEMATYKĄ KREŚLONA

UBEZPIECZ SIĘ,

NAJLEPIEJ U MATEMATYKA

Ryzyko i ubezpieczenie

Możliwość zajścia niechcianego zdarzenia nazywamy ***ryzykiem***.

Ryzyko prawie zawsze wiąże się ze stratą.

Ryzyko i ubezpieczenie

Ludzkość od wielu lat podejmuje próby tworzenia **społecznego systemu bezpieczeństwa finansowego**.

W tym celu tworzy się

– <u>na zasadzie średnich przewidywań</u> –

wspólny fundusz, z którego są zaspokajane nieznane z góry (losowe) indywidualne potrzeby każdego ubezpieczonego.

Ryzyko i ubezpieczenie

Jest to zatem pewien rodzaj *solidarności grupy ubezpieczonych*, której podstawą jest Prawo Wielkich Liczb.

Organizuje i nadzoruje tę działalność Ubezpieczyciel.

PRAWA WIELKICH LICZB

są to twierdzenia (graniczne) opisujące związek między

liczbą *wykonywanych doświadczeń* a

faktycznym ***prawdopodobieństwem***

wystąpienia zdarzenia, którego dotyczą te

doświadczenia.

Prawdopodobieństwo

(miara pewności zdarzenia)

– w znaczeniu potocznym –

szansa na zajście jakiegoś zdarzenia.

Prawo (słabe) wielkich liczb **Bernoulliego** (1713)

Niech $\boldsymbol{X_n}$ oznacza liczbę sukcesów w schemacie Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu $\boldsymbol{p}$ w pojedynczej próbie. Wtedy dla dowolnie małej liczby $\varepsilon > 0$ zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} Pr\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 1.$$

Inaczej: dla dużych wartości $\boldsymbol{n}$ prawdopodobieństwo tego, że średnia liczba sukcesów w schemacie Bernoulliego niewiele ($< \varepsilon$) różni się od od prawdopodobieństwa $\boldsymbol{p}$ sukcesu w pojedynczym doświadczeniu wynosi **1**.

Ryzyko i ubezpieczenie

W praktyce rozważa się różne modele systemów asekuracyjnych, które można zaliczyć do dwóch podstawowych klas:

Ryzyko i ubezpieczenie

1. *Modele przypadków życiowych* – modele trwania życia, modele populacji, modele wzrostu kapitału;
2. *Teorie ryzyka* – modele częstości szkód, modele wysokości szkód.

Ryzyko i ubezpieczenie

Podstawę teoretyczną wymienionych modeli stanowią *matematyczne i probabilistyczno – statystyczne* teorie. Zatem cała teoria ubezpieczeń bazuje na ***matematyce***.

Historia aktuariatu

Matematyka ubezpieczeniowa jako dyscyplina matematyki powstała w XVII wieku wraz z zapotrzebowaniem na długoterminowe ubezpieczenia na życie. Wtedy pojawiły się też pierwsze prace z rachunku prawdopodobieństwa oraz badania nad prawami śmiertelności.

Tablica trwania życia Halleya (1693 r.)

x	l_x	x	l_x	x	l_x	x	l_x	x	l_x	x	l_x
0	1000	14	628	28	539	42	417	56	272	70	131
1	855	15	622	29	531	43	407	57	262	71	120
2	798	16	616	30	523	44	397	58	252	72	109
3	760	17	610	31	515	45	387	59	242	73	98
4	732	18	604	32	507	46	377	60	232	74	88
5	710	19	598	33	449	47	367	61	222	75	78
6	692	20	592	34	490	48	357	62	212	76	68
7	680	21	568	35	481	49	346	63	202	77	58
8	670	22	579	36	472	50	335	64	192	78	49
9	661	23	573	37	463	51	324	65	182	79	41
10	653	24	567	38	454	52	313	66	172	80	34
11	646	25	560	39	445	53	302	67	162	81	28
12	640	26	553	40	436	54	292	68	152	82	23
13	634	27	546	41	427	55	282	69	142	83	20

Podstawowe problemy

– oszacowanie ***wysokości składek*** w sposób zapewniający pokrycie przyszłych świadczeń;

– stworzenie ***matematycznego modelu demograficznego*** opisującego długość trwania ludzkiego życia jako *zmienną losową*.

– uwzględnienie *zmiany wartości pieniądza w czasie.*

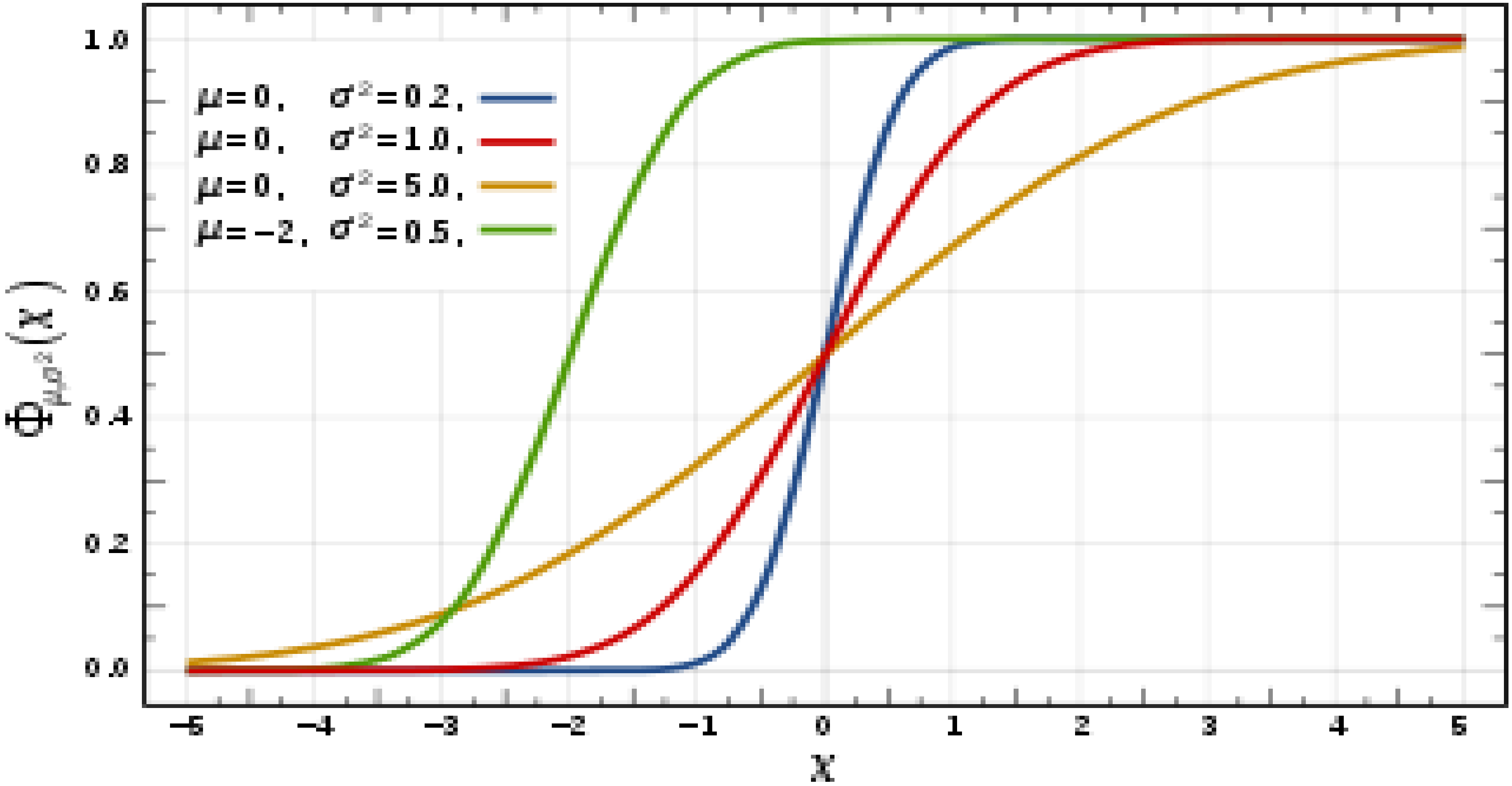
Zmienna losowa – funkcja, przypisująca zdarzeniom elementarnym (związanym z danym doświadczeniem losowym) *liczby*.

Z każdą zmienną losową w jednoznaczny sposób powiązana jest *dystrybuanta* – funkcja, za pomocą której można „zmierzyć” szansę wystąpienia zdarzenia losowego.

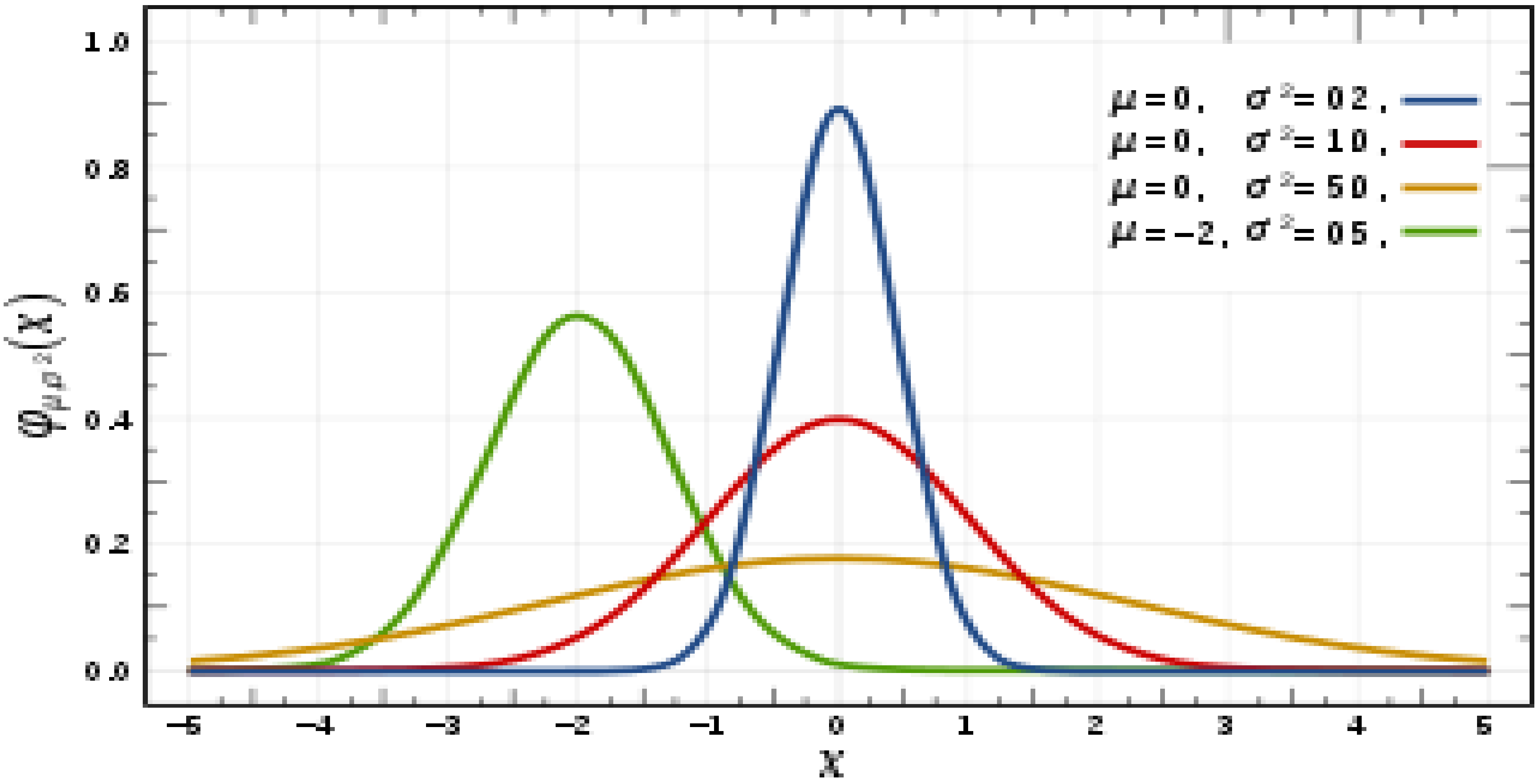
Jeśli znamy funkcję dystrybuanty, to mówimy, że znamy *rozkład prawdopodobieństwa* zmiennej losowej.

Jednym z najważniejszych rozkładów prawdopodobieństwa w statystyce jest rozkład Gaussa, zwany też *rozkładem normalnym*.

Funkcja dystrybuanty rozkładu normalnego $\Phi(u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt, \ dla \ u \in \mathbb{R}$
[źr. wikipedia]



Funkcja gęstości rozkładu normalnego $\varphi(u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ dla\ \ u \in \mathbb{R}$ [źr. wikipedia]



Elementy modelu demograficznego

Podstawą wszystkich rozważań w teorii ubezpieczeń na życie jest *funkcja przeżycia* $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x})$. Podaje ona prawdopodobieństwo zdarzenia, że *noworodek losowo wybrany z danej populacji dożyje wieku* $\boldsymbol{x}$ *lat.*

Elementy modelu demograficznego

Jeśli przez T_0 oznaczymy długość trwania życia noworodka, to

$$s(x) = Pr(T_0 > t).$$

T_0 jest *zmienną losową*.

Elementy modelu demograficznego

Każda zmienna losowa jest opisywana za pomocą *rozkładu prawdopodobieństwa*, tzn. znane są prawdopodobieństwa przyjęcia przez tę zmienną wartości w dowolnym przedziale liczbowym.

Elementy modelu demograficznego

Prawdopodobieństwo zdarzenia, że *noworodek przeżyje co najmniej* $\boldsymbol{x+n}$ *lat pod warunkiem, że osiągnie wiek* $\boldsymbol{x}$, tradycyjnie oznacza się $_{n}\boldsymbol{p}_{x}$, przy czym $_{n}\boldsymbol{p}_{x} + {}_{n}\boldsymbol{q}_{x} = \mathbf{1},$ gdzie

$_{n}\boldsymbol{q}_{x}$ – prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego.

Elementy modelu demograficznego

Z definicji prawdopodobieństwa warunkowego mamy:

$$ {}_n p_x = Pr(T_0 > x + n | T_0 > x) = \frac{s(x+n)}{s(x)} $$

oraz $$ {}_n q_x = 1 - \frac{s(x+n)}{s(x)} . $$

Oznaczmy teraz czas trwania życia osoby w wieku $\boldsymbol{x}$ przez $\boldsymbol{T_x}$. Jest to również zmienna losowa.

Wtedy $\boldsymbol{T_x = T_0 - x}$ dla $\boldsymbol{T_0 \geq x}$.

Zatem $\boldsymbol{{}_nq_x = Pr(T_x \leq n)}$ jest *dystrybuantą* zmiennej losowej $\boldsymbol{T_x}$, a $\boldsymbol{{}_np_x = Pr(T_x > n)}$ jest jej *funkcją przeżycia.*

Elementy modelu demograficznego

Powszechne są następujące oznaczenia:

$(\boldsymbol{x})$ – osoba w wieku $\boldsymbol{x}$ lat;

$\boldsymbol{q_x = Pr((x)}$ umrze w ciągu roku);

$\boldsymbol{p_x = Pr((x)}$ przeżyje najbliższy rok);

$\boldsymbol{{}_{t|u}q_x = Pr(t < T_x \leq t + u) = {}_tp_x - {}_{t+u}p_x;} \quad \boldsymbol{{}_{t|1}q_x = {}_{t|}q_x}$.

Zmienne losowe $\boldsymbol{T_0}$ i $\boldsymbol{T_x}$ mają rozkłady ciągłe.

Przez $\boldsymbol{K_x}$ oznacza się *dyskretny* odpowiednik zmiennej losowej $\boldsymbol{T_x}$.

Zatem $\boldsymbol{K_x}$ opisuje *całkowitą* liczbę lat pozostałych do przeżycia ($\boldsymbol{x}$).

Elementy modelu demograficznego

Rozkład zmiennej losowej $\boldsymbol{K_x}$ jest ściśle powiązany z rozkładem $\boldsymbol{T_x}$:

$$\boldsymbol{Pr(K_x = k) = Pr(k \le T_x < k+1) = {}_{k|}q_x = {}_{n}p_x \cdot q_{x+k}}.$$

Elementy modelu demograficznego

Znane są metody statystyczne, dzięki którym można stablicować rozkłady zmiennych $\boldsymbol{K_x}$ dla całkowitych wartości wieków $\boldsymbol{x}$.

Elementy modelu demograficznego

Informacje o rozkładzie $\boldsymbol{T_x}$ można uzyskać z informacji o rozkładzie $\boldsymbol{K_x}$ i pewnych naturalnych założeń o różnicy

$$\boldsymbol{T_x - K_x = S_x}.$$

Zakłada się najczęściej, że zmienne $\boldsymbol{K_x}$ i $\boldsymbol{S_x}$ są niezależne oraz $\boldsymbol{S_x}$ ma rozkład jednostajny na przedziale jednostkowym.

Elementy modelu demograficznego

Techniczna stopa procentowa $\boldsymbol{i}$ ustala się na bezpiecznie niskim poziomie.

Wtedy czynnik pomnażania kapitału ma postać

$(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})$**,** a czynnik dyskontujący $\boldsymbol{v}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{i}}$.

Elementy modelu demograficznego

Niech $\boldsymbol{Z}$ oznacza wartość obecną świadczenia z danej polisy. Jest to zmienna losowa zależna od $\boldsymbol{T_x}$.

Najprostszą i najbardziej adekwatną miarą wartości polisy jest *wartość oczekiwana* wartości obecnej świadczenia $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{Z})$.

Nazywa się ona *składką jednorazową netto*.

PRZYKŁADOWA POLISA

Rozważmy ***polisę terminową na życie ze świadczeniem płatnym na koniec roku śmierci.***

Ubezpieczony kupuje polisę w wieku $\boldsymbol{x}$. Umiera w wieku $\boldsymbol{x + T_x}$. Wypłata sumy ubezpieczenia następuje na koniec roku śmierci, tzn. w chwili $\boldsymbol{x + K_x + 1}$, ale <u>tylko w przypadku, gdy śmierć nastąpi w ciągu $\boldsymbol{n}$ kolejnych lat</u>.

Wtedy

$$\boldsymbol{Z = (suma\ ubezpieczenia) \cdot v^{K_x+1}},$$

$$\text{jeśli} \quad \boldsymbol{K_x} = 0, 1, \dots, n-1.$$

Rozważając przypadek jednostkowej sumy ubezpieczenia, mamy

$$\boldsymbol{Z = v^{K+1} = \begin{cases} v^{K+1}, & K = 0, 1, \dots, n-1 \\ 0, & K = n, n+1, \dots \end{cases}}.$$

Jednorazową składkę netto oznacza się symbolem $A^{\ 1}_{x:\overline{n}|}$.

Zatem

$$A^{\ 1}_{x:\overline{n}|} = E(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot Pr(K_x = k) = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot \frac{d_{x+k}}{l_x}$$

Wartości $\boldsymbol{d_{x+k}}$ i $\boldsymbol{l_x}$ odczytuje się z Tablic Trwania Życia sporządzanych przez Urząd Statystyczny.

Przykład: Wyznaczmy jednorazową składkę netto w terminowym ubezpieczeniu na życie na 20 lat dla osoby 30-letniej. Suma ubezpieczenia wynosi 100 000 zł. Techniczna stopa procentowa $i = 4\%$.

Skorzystamy ze wzoru

$$A^{\;\;1}_{30:\overline{20|}} = \sum_{k=0}^{19} v^{k+1} \cdot \frac{d_{30+k}}{l_{30}} = \sum_{k=0}^{19} \frac{v^{30+k+1} \cdot d_{30+k}}{v^{30} \cdot l_{30}} =$$

$$\frac{\sum_{k=0}^{19} v^{30+k+1} \cdot d_{30+k}}{v^{30} \cdot l_{30}} = \frac{M_{30} - M_{50}}{D_{30}}$$

Z Tablic Trwania Życia z 1997 roku dla mężczyzn przy $i = 4\%$ obliczamy

$$\boldsymbol{A}^{\;\mathbf{1}}_{\mathbf{30}:\overline{\mathbf{20}}|} = \frac{\boldsymbol{M}_{\mathbf{30}} - \boldsymbol{M}_{\mathbf{50}}}{\boldsymbol{D}_{\mathbf{30}}} = \frac{7\,035{,}2351 - 5\,367{,}1479}{29\,790{,}06} =$$

$$= 0{,}055994757$$

Jednorazowa składka netto w ubezpieczeniu na całe życie na sumę 100 000 zł dla osoby 30-letniej wynosi zatem

$$100\,000 \cdot \boldsymbol{A}_{\mathbf{30:\overline{20}|}}^{\;\mathbf{1}} = 100\,000 \cdot 0{,}055994757 =$$

$$= \mathbf{5\,599,48}\ \boldsymbol{z}\text{ł}.$$

Tablica Trwania Życia dla mężczyzn 1997 r.

x	l_x	d_x	q_x	p_x	μ_x	e_x	x
0	100000	1091	0.01091	0.98909	*	67.95	0
1	98909	57	0.00058	0.99942	*	67.70	1
2	98852	45	0.00046	0.99954	*	66.74	2
3	98807	36	0.00036	0.99964	0.00040	65.77	3
4	98771	30	0.00030	0.99970	0.00033	64.79	4
5	98741	24	0.00024	0.99976	0.00027	63.81	5
6	98717	23	0.00023	0.99977	0.00023	62.83	6
7	98694	24	0.00024	0.99976	0.00024	61.84	7
8	98670	23	0.00023	0.99977	0.00024	60.86	8
9	98647	23	0.00023	0.99977	0.00023	59.87	9
10	98624	23	0.00023	0.99977	0.00023	58.89	10
11	98601	23	0.00023	0.99977	0.00023	57.90	11
12	98578	25	0.00025	0.99975	0.00024	56.91	12
13	98553	27	0.00027	0.99973	0.00026	55.93	13
14	98526	34	0.00035	0.99965	0.00030	54.94	14
15	98492	44	0.00045	0.99955	0.00039	53.96	15
16	98448	62	0.00063	0.99937	0.00052	52.99	16
17	98386	88	0.00089	0.99911	0.00076	52.02	17
18	98298	113	0.00115	0.99885	0.00103	51.07	18
19	98185	129	0.00131	0.99869	0.00125	50.13	19
20	98056	133	0.00136	0.99864	0.00135	49.19	20
21	97923	133	0.00136	0.99864	0.00136	48.26	21
22	97790	133	0.00136	0.99864	0.00136	47.32	22
23	97657	131	0.00134	0.99866	0.00135	46.39	23

Podobnie rozważa się inne rodzaje ubezpieczeń: na całe życie, na dożycie, mieszane na życie i dożycie, odroczone oraz ich kombinacje. Oddzielne grupy ubezpieczeń stanowią renty życiowe, ubezpieczenia grupowe oraz szkodowości wielorakie.

Elementy modelu demograficznego

Oprócz składek płatnych jednorazowo we wszystkich rodzajach polis występują *składki płatne okresowo*.

Elementy modelu demograficznego

Szczególnie ważnym dla firmy ubezpieczeniowej jest zagadnienie obliczenia bezpiecznych **rezerw netto** oraz **brutto** działalności finansowej.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

– obejmuje modele matematyczne ubezpieczeń *krótkoterminowych.*

Podstawowe zagadnienie to

modelowanie rozkładu łącznej wartości szkód w

modelu ryzyka kolektywnego lub indywidualnego.

Wysokość składki musi być tak ustalona, aby

łączna wartość wypłaconych świadczeń

nie przekroczyła

łącznej wartości wpłaconych składek.

Ponieważ rozkłady prawdopodobieństw występujących w tych modelach są często jedynie przybliżeniem rzeczywistych rozkładów, w matematyce ubezpieczeń majątkowych mają zastosowanie

metody aproksymacyjne.

W zakres matematyki ubezpieczeń majątkowych wchodzi również ***teoria ruiny***.

W przypadku tego modelu składki ustala się na takim poziomie, aby w długofalowym horyzoncie prawdopodobieństwo ruiny ubezpieczyciela nie przekroczyło z góry zadanego poziomu.

Innym zagadnieniem matematyki ubezpieczeń majątkowych jest ***reasekuracja*** – podział ryzyka pomiędzy ubezpieczonego a ubezpieczyciela, a także często reasekuratora.

Polega to na ustaleniu, w jakim stopniu szkoda jest pokrywana przez poszczególne strony kontraktu ubezpieczeniowego i jak taki podział wpływa na rozkład prawdopodobieństwa dla wypłat przy zadanym rozkładzie szkód.

Aktuariusz

– osoba zajmująca się zawodowo matematyką ubezpieczeniową.

– w firmie ubezpieczeniowej odpowiada za wycenę zobowiązań wobec klientów oraz konstrukcję produktów tak, by oczekiwany poziom rezerw oraz strumień przyszłych przepływów pieniężnych zabezpieczył pokrycie tych zobowiązań.

Aktuariusz

W Polsce, by zostać wpisanym do rejestru aktuariuszy, wymagane są

– zdanie egzaminów aktuarialnych przy KNF;

– wyższe wykształcenie;

– poświadczenie niekaralności;

– dwuletni staż zawodowy pod kierunkiem aktuariusza.

Aktuariusz

Każdy zakład ubezpieczeń, zgodnie z Ustawą o działalności ubezpieczeniowej

<u>ma obowiązek powołania aktuariusza</u>.

Literatura

1. Hans U. Gerber, *Life insurance mathematics*, Springer-Verlag, Berlin 1990.
2. Newton L. Bowers, Hans U. Gerber, James C. Hickman, Donald A. Jones, Cecil J. Nesbit, *Actuarial mathematics*, Itasca, Ill., Society of Actuaries, 1997.
3. M. Skałba, *Ubezpieczenia na życie*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2002.
4. B. Błaszczyszyn, T. Rolski, *Podstawy matematyki ubezpieczeń na życie*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2004.
5. Wojciech Otto: *Ubezpieczenia majątkowe*. Wyd. 1. Cz. I: Teoria ryzyka, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2004.

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ