dr hab. Krzysztof Prażmowski
Wydział Matematyki i Informatyki UwB

RECENZJA PRACY
Edyta Bartnicka
Prosta rzutowa nad pierścieniem skończonym łącznym z jedynką

Recenzja rozprawy doktorskiej przygotowanej pod opieką dr. hab. Andrzeja Matrasia

1 Generalia

Przedstawiona do recenzji rozprawa doktorska o tytule "Prosta rzutowa nad pierścieniem skończonym łącznym z jedynką" Pani Edyty Bartnickiej swą tematyką plasuje się na granicy między algebrą – teorią pierścieni, a geometrią, a właściwie teorio-grafowymi aspektami pewnych geometrii.

Wyraźnie upraszczając, sprawę można przedstawić następująco: z danym modułem ${}^2R$ wolnym rangi 2 nad pierścieniem R wiąże się zbiór $\mathbb{P}(R)$ – zbiór punktów tzw. prostej rzutowej nad R. Punkty te, to podmoduły wolne cykliczne generowane przez odpowiednie - tzw. dopuszczalne - pary elementów z R. "Geometryzuje" się ten zbiór bądź to przez określenie na nim (analityczne) relacji połączalności Δ bądź relacji żównoległości" $\parallel$ (czy też relacji przylegania $\sim$). Innym sposobem geometryzacji (gdy R jest dany jako rozszerzenie innego pierścienia K) jest zdefiniowanie na $\mathbb{P}(R)$ incydencyjnej struktury łańcuchów. O tej konstrukcji doktorantka wspomina (R. 2.3), ale jej nie używa i nie analizuje.

Podstawowe, zreferowane powyżej, definicje doktorantka zaczerpnęła z literatury, w swej istocie uogólniają one opis "Geometrii Algebr" z monografii W. Benza [5][1]. Oczywiście, własności struktury pomodułów cyklicznych w ${}^2R$ zależą istotnie od własności wyjściowego pierścienia R i zasadnicze części pracy to prezentacja własności grafów połączalności dla wybranych klas pierścieni.

2 Struktura pracy – wyniki, usterki

Rozdział pierwszy, to przytoczenie definicji podstawowych, używanych dalej w rozprawie, pojęć i konstrukcji, zaczerpniętych z slgebry i teorii grafów. Dla czytelnika "z boku" dobór definicji nie wydaje się do końca konsekwentny, na

[1] Odsyłacze bibliograficzne podaję zgodnie z bibliografią z recenzowanej rozprawy

przykład: przytoczona jest definicja półprostoty (pierścieni), a nie przytoczona artinowskości; czym motywowany jest taki dobór? Nie oczekuję tu, oczywiście, pełnego wykładu, ale trochę nie rozumiem intencji Autorki. Z drugiej strony daje się tu zaobserwować pewna ogólna "wada" redakcji pracy, która przejawiać się będzie i dalej, a którą można by nazwać "lekką chaotycznością". Usterka ta nie dyskwalifikuje pracy, ale utrudnia jej czytanie[2]. Oto bardziej konkretne usterki zauważone w tym rozdziale.

1.) Mamy określone pojęcie Grassmanianu, spreadu, ... Na stronie 8_3 mówi się, że *odpowiada to* przestrzeni rzutowej $PG(m-1,q)$, ale właściwie na czym to ma polegać to "odpowiadanie"? Czym jest $PG(m-1,q)$?□[3]

2.) Na stronie 13_1 mówi się, że e_i są centralne, wtedy $e_iR = Re_i$. Istota warunku, to chyba izomorficzność e_iR i e_iRe_i? Ale $e_iRe_i = e_ie_iR = e_i^2R = e_iR$. Więc nie izomorficzność $\simeq$, ale równość $=$, która i tak wynika?□

3.) Na stronie 15_3 błędna jest definicja wolnego działania. W formule definiującej biorąc w szczególności $\varphi = \psi$ (skoro "dla wszystkich"...) dostajemy $x^\varphi = x^\psi$ dla każdego x. Zatem, zgodnie z *tą* definicją *żadne* działanie grupy nie byłoby wolne□

W rozdziale drugim zapoznajemy się z definicją prostej rzutowej nad pierścieniem i relacjami na niej. Wyniki po części cytowane z "obcych" prac, część uogólnia wyniki znane, ładna konstrukcja (kontr)przykładu 2.1. Usterki zauważone:

4.) na 20_2 jest "powyższego lematu": prościej użyć `\ref` i odwołać się do *konkretnego* stwierdzenia. Tu – zapewne – do Lematu 2.3.

Usterka tego typu pojawia się częściej, ale nie będzie już dalej przeze mnie sygnalizowana□

5.) Strona 22^8: chodzi o to, by $k \in F$ (inaczej $k = \alpha$ zawsze jest rozwiązaniem), ale nie napisano tego□

6.) Użyte w Twierdzeniu 2.7 pojęcie *F-algebra* nie jest wcześniej zdefiniowane, definicja (ewentualna) jest dalej na stronie 24_4. Kształt litery – F – *sugeruje*, że F jest ciałem, ale nie jest to tu explicite założone□

7.) Co znaczy w 22_{14-13} fraza *nie istnieje*? Zapewne: *Rozszerzenie ciała F do F-algebry wymiaru 2 nad F będącej ciałem nie zawsze istnieje.* Albo *Rozszerzenie typu 2 z Twierdzenia 2.7 nie dla każdego ciała F istnieje.*□

Rozdział trzeci, to analiza (dość ogólna) grafu relacji Δ na zbiorze $\mathbb{P}(R)$. Wskazuje się, jak graf połączalności wyznaczony przez produkt prosty pierścieni wyrazić za pomocą grafów wyznaczonych przez składniki produktu (Lemat 3.3, w/g literatury w [10]), wskazuje się też na możliwość zgrabnego odwzorowania grafu wyznaczonego przez pierścień na graf wyznaczony przez pierścień ilorazowy (modulo radykał Jacobsona).

Szkoda, że wypunktowane w streszczeniu wyniki, w szczególności charakterystyka grafu połączalności (28_2-29^5)wyznaczonego przez pierścień macierzy

[2] Praca zresztą w ogóle czyta się dość ciężko: stosowanie nie precyzyjnych odsyłaczy, brak numeracji wzorów, co utrudnia "zahaczanie" o nie wywodów. Odnosi się czasem wrażenie, że czytelnik stale musi pamiętać całość poprzednich wywodów

[3] Symbolem □ oznaczam koniec stosownej uwagi, taką "dużą" kropkę.

dolno-trójkątnych, nie są wyodrębione w tekście jako Proposition, Theorem, lub tp.
Podobnie "ukryte" są 31^{10-13} i 32_{5-1}. Zauważone usterki, to
8.) Prosta rzutowa, to "goły" zbiór; w Lemacie 3.3 stwierdza się (formalnie błędną) izomorficzność. W oryginale, w 6.1 w [10], określona jest bijekcja między odpowiednimi zbiorami, która pewne relacje przenosi/zachowuje. Ostatecznie, bijekcję między zbiorami można treaktować jak swego rodzaju izomorfizm (struktura z pustą relacją), ale wtedy z 3.3 nie wynika Uwaga 3.1; w istocie 3.1 *jest stwierdzone* w 6.1 z [10].
W zasadzie, i tytuł R.3.2 jest mylący nieco: izomorfizm to (as a rule) izomorfizm struktur. Właściwsze byłoby "Bijekcje ... zachowujące ..." albo "Izomorfizmy i automorfizmy relacji ..."$\boxdot$

Rozdział czwarty koncentruje się na przypadku pierścieni skończonych. Główne prezentowane tu wyniki dotyczą rozkładu grafu połączalności na sumę wierzchołkowo rozłącznych klik maksymalnych i wyznaczenia numerycznych parametrów tego rozkładu. Konstrukcję takiego rozkładu pokazuje się dla skończonego pierścienia lokalnego, dla produktu grafów, dla pierścienia ilorazowego modulo radykał Jacobsona. W dalszej części zagadnienie opisu rozkładu grafu połączalności sprowadza się do analizy połączalności nad pierścieniem macierzy. Ten ostatni zaś sprowadza się do (cytowane: [7]) do znanych opisów połączalności w odpowiednim Grassmanianie. Podobnie wyznaczone są liczności grup automorfizmów relacji połączalności nad pierścieniami $\mathbb{Z}_{p^n}$, p - liczba pierwsza.
Rozdział kończy lista możliwych grafów połączalności wyznaczonych przez nierozkładalne pierścienie o rzędach postaci p^n, p - liczba pierwsza, dla $n \leq 5$; grafy te opisane są przez liczbę i liczności ich maksymalnych klik w rozkładzie na składniki wierzchołkowo rozłączne. Szkoda, że nie ma tu uwidocznionej jakiejś prawidłowości *dla dowolnego* n ....

Zasadnicze usterki, to znowu pewne "niezręczności".
9.) Dość nieszczęśliwie jest dobrana symbolika w komentarzu do 4.1. Numerowanie wierzchołków v_i^j to na pewno podwójne indeksowanie. Oznaczenie u_i^k nie jest już tak oczywiste: to podwójne indeksy $u_{i,k}$, czy potęgi $u_i^{\text{do } k}$?$\boxdot$
10.) W cytowanej [7, Tw. 2.4] mówi się o istnieniu bijekcji (jawnie tam określonej), która (m.in.) utożsamia dwa grafy – jest ich izomorfizmem. Doktorantka na stronie 37_{12} stwierdza, że istnieje bijekcja. Dalej, w 37_5 stwierdza, że "utożsamiamy ...". To nie *my* utożsamiamy, to stosowna bijekcja utożsamia$\boxdot$

Brakuje mi też jakiegoś uzasadnienia czy i w jakim stopniu rozkład grafu (dowolnego, spójnego, o stałym rzędzie wierzchołków r) na sumę k wierzchołkowo rozłącznych klik maksymalnych o stałej liczności m (czyli na sumę podgrafów pełnych K_m) wyznacza sam wyjściowy graf.

Rozdział ostatni, piąty, to analiza – ogólniejszej – struktury podmodułów cyklicznych w ${}^2R$ generowanych przez pary nie koniecznie unimodularne, w szczególności przez pary tzw. oddalone. Analiza ważna, bo nadmierne rozszerzenie definicji "punktu" prostej rzutowej może prowadzić do sytuacji, gdy dwa różne "punkty" będą w sobie zawarte (por. Przykład 2.1).

Sporo w tym rozdziale interesujących przykładów. W szczególności ciekawe jest wyznaczenie orbit (względem grupy liniowej pierścienia) podmudułów cyklicznych w ^2R gdy R jest pierścieniem macierzy trójkątnych 3×3 nad ciałem i orbit par generujących te podmoduły (Twierdzenie 5.4).

Ważne jest też (jak mi się zdaje) wskazanie jedynych nierozkładalnych pierścieni rzędu będącego potęgą liczby pierwszej zawierających wolne podmuduły cykliczne generowane przez pary oddalone. Jak zdaje się wynikać z 48_4-49^3 (szkoda, że nie jest to jakoś "uwypuklone"[4]) ewentualne wzbogacenie prostej rzutowej o pary oddalone (podmoduły generowane przez nie) nie rozszerzy istotnie grafu połączalności – dojdzie tylko kilka wierzchołków izolowanych.

W tym rozdziale nie rzuciły mi się w oczy jakieś "nowe"usterki.

3 Konkluzja

Podsumowując: mimo wyliczonych w recenzji usterek rozprawa "Prosta rzutowa nad pierścieniem skończonym łącznym z jedynką" w mojej opinii spełnia wymagania stawiane rozprawom doktorskim. Zawiera wyniki nowe i ciekawe. Autorka w stopniu dostatecznym opanowała sztukę pisania rozpraw naukowych, ma też (sądząc w szczególności z cytowanej literatury) w dorobku kilka opublikowanych już prac, a więc i sztukę pisania artykułów dostatecznie opanowała. Tematyka pracy leży niedaleko od centrum badań geometrycznych, wyniki na ten temat pojawiają się ciągle w literaturze ostatnich lat. Nawet cytowany artykuł na arXiv autorstwa Silvermanna (pochodzącego z innego kręgu badawczego przecież) wyraźnie o tym świadczy. Widać też związki z aktualnymi badaniami dotyczącymi geometrii skończonych, można też spodziewać się uzyskania jakichś globalnych charakterystyk jakościowych grafów połączalności pochodzących od pierścieni skończonych. Spodziewam się więc, inaczej mówiąc, że tematykę rozprawy można kontynuować. W tym kontekście można by to stwierdzenie rozumieć jako zarzut: "temat nie został wyczerpany". Wprawdzie istotnie temat nie został wyczerpany, ale chodzi raczej o to, że zakres badań nie został zamknięty; nie wydaje się jednak, by ten zakres w obecnej chwili można było sensownie zamknąć.

Wnoszę zatem o dopuszczenie Pani Edyty Bartnickiej do dalszych etapów przewodu doktorskiego

6 września 2017

K. Prażmowski

[4] por. uwagi o wynikach "ukrytych" w Rozdziale 3. rozprawy. Chyba Autorka unika formułowania jako twierdzenia wyników "jakościowych"