Dziekan Wydziału Matematyki i Informatyki 24 kwietnia, 2015
UWM w Olsztynie
dr. hab. Jan Jakóbowski, prof. UWM

Recenzja rozprawy doktorskiej Pani mgr Bogumiły Kowalczyk pt.

„Funkcje wielomianowo prawie–wypukłe"

Niech $\mathcal{H}$ będzie klasą wszystkich funkcji holomorficznych w kole jednostkowym $\mathbb{D} := \mathbb{D}(0,1)$, gdzie $\mathbb{D}(a,r) := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - a| < r\}$ dla $a \in \mathbb{C}$ i $r > 0$. W 1952 roku Kaplan wykazał następujące kryterium jednolistności (tj. różnowartościowości) funkcji holomorficznej w kole $\mathbb{D}$.
Dla dowolnych $f, g \in \mathcal{H}$, jeśli funkcja g odwzorowuje różnowartościowo koło $\mathbb{D}$ na zbiór wypukły $g(\mathbb{D})$ w płaszczyźnie zespolonej $\mathbb{C}$, $f'(0) \neq 0$ oraz

$$\operatorname{Re}\frac{f'(z)}{g'(z)} \geqslant 0 \,, \quad z \in \mathbb{D} \,, \tag{1}$$

to f jest funkcją różnowartościową w $\mathbb{D}$. Funkcja $f \in \mathcal{A} := \{h \in \mathcal{H} : h(0) = 0 = h'(0) - 1\}$, dla której istnieje funkcja $g \in \mathcal{H}$ o powyższych własnościach, nazywana jest *funkcją prawie–wypukłą*.
Warunek jednolistności (1) uzasadnia rozważanie następującej klasy funkcji *prawie wypukłych względem dowolnie ustalonej funkcji $h \in \mathcal{H}$*:

$$\mathcal{C}^*(h) := \left\{ f \in \mathcal{A} : \bigwedge_{z \in \mathbb{D}} \operatorname{Re}(h(z) f'(z)) \geqslant 0 \right\}. \tag{2}$$

Zauważmy, że $f \in \mathcal{A}$ jest funkcją prawie wypukłą wtedy i tylko wtedy, gdy $f \in \mathcal{C}^*(1/g')$ dla pewnej funkcji $g \in \mathcal{A}$ odwzorowującej różnowartościowo koło $\mathbb{D}$ na zbiór wypukły $g(\mathbb{D})$. W szczególności autorka definiuje w podrozdziale 2.1 tytułowe *funkcje wielomianowo prawie–wypukłe.* W tym celu stosuje wzór (2) dla wielomianów h takich, że $0 \notin h(\mathbb{D})$ i $|h(0)| = 1$. Dokładniej rzecz ujmując, autorka określa zbiory ciągów

$$\Lambda_0 := \{0\}^1 \,, \quad \Lambda_n := \{\zeta \in \mathbb{C} : 0 < |\zeta| \leqslant 1\}^n \text{ dla } n \in \mathbb{N} \,, \quad \text{oraz } \Lambda := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \Lambda_n \,,$$

gdzie $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, a następnie definiuje wielomiany

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto P_\Lambda(z) := \begin{cases} 1 & \text{gdy } \Lambda \in \Lambda_0 \,, \\ \prod_{k=1}^{n} (1 - \Lambda(k) z) & \text{gdy } n \in \mathbb{N} \text{ i } \Lambda \in \Lambda_n \end{cases}$$

Klasy funkcji

$$\mathcal{C}(\delta, \Lambda) := \mathcal{C}^*(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta} P_\Lambda) \,, \quad \delta \in [-\pi/2; \pi/2], \, \Lambda \in \mathbf{\Lambda} \,, \tag{3}$$

są kluczowe w tej pracy. Funkcje klasy $\mathcal{C}(\delta,\Lambda)$ autorka nazywa *funkcjami wielomianowo prawie-wypukłymi względem* Λ *z argumentem* δ; por. definicja 2.1 na str. 14. Definicja ta zawiera również określenia klas pochodnych

$$\mathcal{C}(\Lambda) := \bigcup_{\delta\in[-\pi/2;\pi/2]} \mathcal{C}(\delta,\Lambda)\,, \quad \Lambda\in\mathbf{\Lambda}\,,$$

$$\mathcal{C}_\delta^{(k)} := \bigcup_{\Lambda\in\mathbf{\Lambda}_k} \mathcal{C}(\delta,\Lambda)\,, \quad k\in\mathbb{N}_0\,,\ \delta\in[-\pi/2;\pi/2]\,,$$

$$\mathcal{C}_\delta := \bigcup_{k\in\mathbb{N}_0} \mathcal{C}_\delta^{(k)}\,, \quad \delta\in[-\pi/2;\pi/2]\,,$$

$$\mathcal{C}^{(k)} := \bigcup_{\delta\in[-\pi/2;\pi/2]} \mathcal{C}_\delta^{(k)}\,, \quad k\in\mathbb{N}_0\,,$$

$$\mathcal{C} := \bigcup_{k\in\mathbb{N}_0} \mathcal{C}^{(k)}\,,$$

nazwanych odpowiednio klasami funkcji: *wielomianowo prawie-wypukłymi względem* Λ, *wielomianowo prawie-wypukłymi stopnia* k *z argumentem* δ, *wielomianowo prawie-wypukłymi z argumentem* δ, *wielomianowo prawie-wypukłymi stopnia* k i *wielomianowo prawie-wypukłymi.* W podrozdziale 2.2 autorka dowodzi podstawowych własności tych funkcji; por. twierdzenia 2.3, 2.4, 2.5, 2.8, 2.9 i 2.10. Warto tutaj wyróżnić twierdzenia 2.3, 2.5, 2.8 oraz 2.10. Pierwsze z nich wyraża fakt, że *dla dowolnych* $\delta\in[-\pi/2;\pi/2]$, $\Lambda\in\mathbf{\Lambda}$ *i* $f\in\mathcal{C}(\delta,\Lambda)$,

$$\operatorname{Re}\Big(e^{i\delta}P_\Lambda(z)f'(z)\Big) > 0\,, \quad z\in\mathbb{D}\,,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $|\delta|<\pi/2$. Drugie ustala zależność

$$\mathcal{C}(-\pi/2,\Lambda) = \mathcal{C}(\pi/2,\Lambda) = \{h_\Lambda\}\,, \quad \Lambda\in\mathbf{\Lambda}\,,$$

gdzie

$$\mathbb{D}\ni z\mapsto h_\Lambda(z) := \int_0^1 \frac{z}{P_\Lambda(tz)}\,dt\,.$$

Trzecie opisuje związek klas $\mathcal{C}(\delta,\Lambda)$ i $\mathcal{C}(\Lambda)$ z funkcjami prawie wypukłymi względem funkcji

$$\mathbb{D}\ni z\mapsto g_\Lambda(z) := z/P_\Lambda(z)\,.$$

Treścią czwartego twierdzenia jest lokalna wspólna ograniczoność, wypukłość i zwartość (w sensie topologii zbieżności niemal jednostajnej w $\mathbb{D}$) każdej z klas $\mathcal{C}(\delta,\Lambda)$ dla $\delta\in(-\pi/2;\pi/2)$ i $\Lambda\in\mathbf{\Lambda}$.

Klasy $\mathcal{C}(\delta,\Lambda)$ stanowią naturalne rozszerzenia klas badanych na przestrzeni kilku ostatnich dziesięcioleci przez wielu matematyków pod kątem kryteriów jednolistności funkcji holomorficznych oraz analitycznych charakteryzacji funkcji określonych warunkami geometrycznymi, jak np. funkcje holomorficzne i wypukłe w zadanym kierunku. Szerzej na ten temat autorka pisze w podrozdziale 2.3 przytaczając odnośniki do prac takich autorów jak między innymi: Ozaki, Noshiro, Warschawski, Robertson, Hengartner i Schober, Lecko i Ciozda. Daje to dobrą motywację dla pracy badawczej w tym zakresie, a recenzowana praca doktorska prezentuje jej rezultaty.

Podstawowym problemem dla funkcji z klasy $\mathcal{C}(\delta,\Lambda)$ jest ich jednolistność. Autorka dowodzi w rozdziale trzecim, że dla każdego $\Lambda\in\mathbf{\Lambda}_0\cup\mathbf{\Lambda}_1\cup\mathbf{\Lambda}_2$ funkcje z klasy $\mathcal{C}(\Lambda)$

są jednolistne; por. wniosek 3.10. W przypadku $k \geqslant 3$ twierdzenie 3.11 podaje warunek dostateczny jednolistności funkcji z klasy $\mathcal{C}(\Lambda)$, gdy $\Lambda \in \Lambda_k$.

Rozdział czwarty poświęcony jest ogólnie rzecz biorąc związkom pomiędzy klasami $\mathcal{C}(\delta_1, \Lambda_1)$ i $\mathcal{C}(\delta_2, \Lambda_2)$ dla $\delta_1, \delta_2 \in (-\pi/2; \pi/2)$ i $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \boldsymbol{\Lambda}$. Zgodnie z twierdzeniem 4.3,

$$\mathcal{C}(\delta_1, \Lambda_1) \setminus \mathcal{C}(\delta_2, \Lambda_2) \neq \emptyset \neq \mathcal{C}(\delta_2, \Lambda_2) \setminus \mathcal{C}(\delta_1, \Lambda_1)$$

o ile $\delta_1 \neq \delta_2 \in (-\pi/2; \pi/2)$ lub $P_{\Lambda_1} \neq P_{\Lambda_2}$, czyli klasy są istotnie różne (bez zawierania). Jest to wspólny wynik autorki i promotora; por. praca [35] w bibliografii. W związku z tym można określić największy promień $R \in (0; 1]$ o tej własności, że dla każdej funkcji $f \in \mathcal{C}(\delta_1, \Lambda_1)$,

$$\mathrm{Re}\Big(\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_2} P_{\Lambda_2}(z) f'(z) \Big) > 0 \,, \quad z \in \mathbb{D}(0, R) \,,$$

oznaczany przez $R_{\delta_2,\Lambda_2}(\delta_1, \Lambda_1)$; por. definicja 4.4 i uwaga 4.5. Wobec twierdzenia 4.3, dla wszystkich $\delta_1, \delta_2 \in (-\pi/2; \pi/2)$ i $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \boldsymbol{\Lambda}$,

$$\delta_1 \neq \delta_2 \vee P_{\Lambda_1} \neq P_{\Lambda_2} \Rightarrow 0 < R_{\delta_2,\Lambda_2}(\delta_1, \Lambda_1) < 1 \,;$$

por. wniosek 4.6. W podrozdziale 4.2 autorka bada własności promienia $R_{\delta_2,\Lambda_2}(\delta_1, \Lambda_1)$ w szczególnym przypadku, gdy $\delta_1 = \delta_2 = 0$. W tym celu definiuje funkcję

$$[0; 1) \ni r \longmapsto T_{\Lambda_1,\Lambda_2}(r) := \inf_{p \in \mathcal{P}} \min_{z \in \mathbb{T}(0,r)} \mathrm{Re}\left\{ \frac{P_{\Lambda_2}(z)}{P_{\Lambda_1}(z)} p(z) \right\} , \tag{4}$$

gdzie $\mathcal{P}$ jest klasą funkcji Carathéodory'ego i $\mathbb{T}(0, r) := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| = r\}$ dla $r \geqslant 0$. W istocie operator inf we wzorze (4) można zastąpić przez operator min; por. lemat 4.8. Funkcja T_{Λ_1,Λ_2} jest ściśle malejąca i ciągła dla wszystkich $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \boldsymbol{\Lambda}$ takich, że $P_{\Lambda_1} \neq P_{\Lambda_2}$, co jest treścią lematu 4.11. W konsekwencji promień $R_{0,\Lambda_2}(0, \Lambda_1)$ jest jedynym miejscem zerowym funkcji T_{Λ_1,Λ_2}, czyli

$$R_{0,\Lambda_2}(0, \Lambda_1) = T^{-1}_{\Lambda_1,\Lambda_2}(0) \,;$$

por twierdzenie 4.12. Korzystając z tego, że funkcje

$$\mathbb{D} \ni z \longmapsto L_x(z) := \frac{1 + xz}{1 - xz} , \qquad x \in \mathbb{T} := \mathbb{T}(0, 1)$$

są wszystkimi punktami ekstremalnymi klasy $\mathcal{P}$ można wyrazić promień $R_{0,\Lambda_2}(0, \Lambda_1)$ jako jedyną liczbę $r \in (0; 1)$ spełniającą równość

$$\min_{x \in \mathbb{T}} \min_{z \in \mathbb{T}(0,r)} \mathrm{Re}\left\{ \frac{P_{\Lambda_2}(z)}{P_{\Lambda_1}(z)} L_x(z) \right\} = 0 \,; \tag{5}$$

por. twierdzenie 4.14. Co ważne, równanie (5) nadaje się do celów rachunkowych i szkoda, że praca nie zawiera żadnego konkretnego przykładu.

Zagadnienie współczynników funkcji klasy $\mathcal{C}(\delta, \Lambda)$ dla dowolnie ustalonych parametrów $\delta \in (-\pi/2; \pi/2)$ i $\Lambda \in \boldsymbol{\Lambda}$ poruszone jest w rozdziale piątym. Ze wzorów (3), (2) i równości $P_\Lambda(0) f'(0) = 1$ wynika na podstawie twierdzenia 1.8, że dla każdej funkcji $f \in \mathcal{C}(\delta, \Lambda)$ istnieje funkcja $p \in \mathcal{P}$ spełniająca warunek

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta} P_\Lambda(z) f'(z) = p(z) \cos\delta + \mathrm{i} \sin\delta \,, \quad z \in \mathbb{D} \,. \tag{6}$$

Korzystając z równości (6) autorka wyraża współczynniki rozwinięcia funkcji $f \in \mathcal{C}(\delta, \Lambda)$ w szereg potęgowy w kole $\mathbb{D}$ za pomocą δ, miejsc zerowych wielomianu P_Λ oraz współczynników rozwinięcia funkcji p w szereg potęgowy w kole $\mathbb{D}$. Głównym rezultatem jest tutaj twierdzenie 5.3, z którego wynikają wzory w szczególnych przypadkach opisane we wnioskach 5.4–5.10. Ciekawą konsekwencją wniosku 5.5 jest twierdzenie 5.13, z którego wynika, że funkcje z klasy $\mathcal{C}(0, \Lambda)$ nie są na ogół jednolistne gdy P_Λ jest wielomianem stopnia co najmniej trzeciego.

Najbardziej obszernym rozdziałem, bo zajmującym połowę objętości rozprawy, jest rozdział szósty. Traktuje on o funkcjonale Fekete-Szegö określonym następująco

$$\mathcal{A} \times \mathbb{C} \ni (f, \lambda) \mapsto \Phi_\lambda(f) := \left|\frac{1}{6} f'''(0) - \frac{\lambda}{4}(f''(0))^2\right| .$$

Funkcja

$$\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto \max_{f \in \mathcal{F}} \Phi_\lambda(f)$$

była przedmiotem badań wielu matematyków dla różnych podklas zwartych $\mathcal{F}$ klasy $\mathcal{A}$. Autorka rozważa tą funkcję w dwóch przypadkach.
Pierwszy z nich — rozpatrywany w podrozdziale 6.2 — dotyczy klasy $\mathcal{F} := \mathcal{C}(\Lambda)$, gdzie $\{1, 2\} \ni k \mapsto \Lambda(k) := \alpha$ dla dowolnie zadanego $\alpha \in [0; 1]$. Centralnym wynikiem jest tutaj twierdzenie 6.3, które podaje następujące oszacowania:

$$\max_{f \in \mathcal{F}} \Phi_\lambda(f) \leqslant \left|\frac{2}{3} + \frac{4}{3}\alpha + \alpha^2 - (1+\alpha)^2\lambda\right| , \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{2\alpha}{3(1+\alpha)}; \frac{2(2+\alpha)}{3(1+\alpha)}\right) , \tag{7}$$

oraz

$$\max_{f \in \mathcal{F}} \Phi_\lambda(f) \leqslant \frac{2}{3} + \alpha^2\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{(2-3\lambda)^2}{2-|2-3\lambda|} + |1-\lambda|\right) , \quad \lambda \in \left[\frac{2\alpha}{3(1+\alpha)}; \frac{2(2+\alpha)}{3(1+\alpha)}\right] . \tag{8}$$

Co więcej, twierdzenie to opisuje również funkcje ekstremalne. Dowód twierdzenia 6.3 jest długi bo liczy prawie trzydzieści stron. Idea dowodu wygląda następująco.

- Dla dowolnie ustalonych $\alpha \in [0; 1]$ i $f \in \mathcal{F}$ istnieją $\delta \in (-\pi/2; \pi/2)$ i funkcja $p \in \mathcal{P}$ spełniające warunek (6); por. (6.16) na str. 60.

- Porównując współczynniki rozwinięcia w szeregi potęgowe obu stron równości w (6) autorka wyraża współczynniki $a_2 = f'(0)/2$ i $a_3 = f'''(0)/6$ za pomocą współczynników $c_1 = p'(0)$ i $c_2 = p''(0)/2$ oraz parametrów α i δ; por. równości (6.18) na str. 60.
- Korzystając z klasycznej nierówności $|c_2 - c_1^2/2| \leqslant 2 - |c_1|^2/2$ (twierdzenie 1.14) autorka dochodzi do nierówności (6.19) na str. 61–62, z której za pośrednictwem podstawień $x := |c_1|$, $y := \cos\delta$ i $\gamma := 2 - 3\lambda$ wynika oszacowanie (nierówność (6.20) na str. 61),

$$\max_{f \in \mathcal{F}} \Phi_\lambda(f) \leqslant \max_{(x,y) \in R} F_{\alpha,\gamma}(x, y) , \tag{9}$$

gdzie $R := [0; 2] \times [0; 1]$ zaś funkcja $F_{\alpha,\gamma}$ określona jest wzorem na str. 61:

$$F_{\alpha,\gamma}(x, y) := \frac{1}{3}\alpha^2|1+\gamma| + \frac{1}{3}\left(2 + \frac{x^2}{2}\left(\sqrt{1 - \left(1 - \frac{\gamma^2}{4}\right)y^2} - 1\right) + \alpha|\gamma|x\right) y$$

dla $(x, y) \in R$.

Dalsza część dowodu dotyczy wyznaczenia wartości prawej strony nierówności (9) poprzez wyznaczenie największej wartości funkcji dwóch zmiennych $F_{\alpha,\gamma}$ w prostokącie R. Problem polega na tym, że funkcja ta zależy od dwóch parametrów $\alpha \in [0;1]$ i $\gamma \in \mathbb{R}$.

- Funkcja $F_{\alpha,\gamma}$ nie ma punktów krytycznych wewnątrz prostokąta R; por. punkt 6 dowodu na str. 65–71. W związku z tym największej wartości funkcji $F_{\alpha,\gamma}$ należy szukać na brzegu prostokąta R.

- Analiza przebiegu funkcji $F_{\alpha,\gamma}$ na brzegu prostokąta R sprowadza się do badania przebiegu czterech funkcji jednej zmiennej rzeczywistej powstałych w wyniku obcięcia funkcji $F_{\alpha,\gamma}$ do czterech odcinków tworzących brzeg prostokąta R. Autorka ustala, że funkcja $F_{\alpha,\gamma}$ może osiągnąć największą wartość w zbiorze $R_{\alpha,\gamma}$ złożonym z czterech wierzchołków prostokąta R oraz ewentualnie dwóch punktów $(x_{\alpha,\gamma},1) \in (0;2) \times \{1\}$ lub $(2, y_{\alpha,\gamma}) \in \{2\} \times (0;1)$; por. punkty 1–5 dowodu na str. 61–65.
- Porównanie wartości funkcji $F_{\alpha,\gamma}$ w punktach zbioru $R_{\alpha,\gamma}$ prowadzi do badania szeregu nierówności, z których najtrudniejsza jest do wykazania nierówność (6.68) na str. 73; por. punkt 7 dowodu na str. 71–86. Można ją sprowadzić do wykazania nierówności

$$(10) \qquad V_\alpha(u) > 0\,, \quad u \in [0; \sqrt{2/(\alpha+1)}]\,, \; \alpha \in (0;1)\,,$$

gdzie V_α jest wielomianem rzeczywistym jednej zmiennej określonym na str. 74. Ponieważ $V_\alpha(0) > 0$, więc nierówność (10) jest równoważna z brakiem zer wielomianu V_α w przedziale $[0; \sqrt{2/(\alpha+1)}]$ dla każdego $\alpha \in (0;1)$. W celu zweryfikowania ostatniej własności autorka skutecznie używa metody Laguerre'a opisanej w podrozdziale 6.1. Wielomian V_α jest stopnia 9-tego, co skutkuje wykonaniem znacznej liczby żmudnych rachunków przedstawionych na str. 75–86.

- Problem dokładności oszacowań (7) i (8) omówiony jest w punkcie 8-mym dowodu na str. 86–88.

Z twierdzenia 6.3 wynika bezpośrednio szereg oszacowań w szczególnych przypadkach wartości parametrów α i δ. Autorka umieszcza je w postaci wniosków 6.4–6.8 pod koniec podrozdziału 6.2.
Drugi z rozważanych przypadków — rozpatrywany w podrozdziale 6.3 — dotyczy klasy $\mathcal{F} := \mathcal{C}(\Lambda)$, gdzie $\{1\} \ni k \mapsto \Lambda(k) := \alpha$ dla dowolnie zadanego $\alpha \in [0;1]$. Powielając metodę dowodową z przypadku pierwszego autorka wykazuje twierdzenie 6.9, które podaje następujące oszacowania:

$$\max_{f\in\mathcal{F}} \Phi_\lambda(f) \leqslant \alpha^2 \left|\frac{1}{3} - \frac{\lambda}{4}\right| + (1+\alpha)\left|\frac{2}{3} - \lambda\right|\,, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{2\alpha}{3(2+\alpha)}; \frac{2(4+\alpha)}{3(2+\alpha)}\right),$$

oraz

$$\max_{f\in\mathcal{F}} \Phi_\lambda(f) \leqslant \frac{2}{3} + \alpha^2 \left(\frac{1}{12}\cdot\frac{(2-3\lambda)^2}{2-|2-3\lambda|} + \left|\frac{1}{3} - \frac{\lambda}{4}\right|\right), \quad \lambda \in \left[\frac{2\alpha}{3(2+\alpha)}; \frac{2(4+\alpha)}{3(2+\alpha)}\right].$$

Co więcej, twierdzenie to opisuje również funkcje ekstremalne. Z twierdzenia 6.9 wynika bezpośrednio szereg oszacowań w szczególnych przypadkach wartości parametrów α i δ, które autorka podaje w postaci wniosków 6.10–6.12 pod koniec podrozdziału 6.2. Ponadto autorka zwraca uwagę na to, że w klasie $\mathcal{F} := \bigcup_{g\in\mathcal{S}^c}\mathcal{C}^*(1/g')$, gdzie $\mathcal{S}^c$ jest klasą funkcji wypukłych określoną na str. 12, oszacowanie

$$\max_{f\in\mathcal{F}}\Phi_\lambda(f)\leqslant\frac{5}{6}\,,\qquad \lambda\in(2/3;1]\,,$$

uzyskane przez Abdel-Gawada i Thomasa nie jest dokładne wbrew twierdzeniu autorów; por. uwaga 6.13.

Uwagi szczegółowe

W przedłożonej do recenzji pracy autorka wprowadziła klasę funkcji holomorficznych wielomianowo prawie-wypukłych, a następnie wykazała szereg ogólnych własności tych funkcji. W szczególności uzyskała wraz z promotorem dokładne oszacowania funkcjonału Fekete-Szegö w pewnych podklasach funkcji wielomianowo prawie-wypukłych. Istotnych błędów merytorycznych w przedłożonej do recenzji rozprawie doktorskiej nie dopatrzyłem się. Mam jednak kilka uwag.

1. Twierdzenie 1.19 na str. 12 jest fałszywe. Prawdopodobnie autorka przez pomyłkę zamieniła miejscami klasy $\mathcal{S}^*$ i $\mathcal{S}^c$.

2. Fragment dowodu twierdzenia 4.3 na str. 32 (linie 8-14 od dołu) „Stąd i z faktu, że $R(\mathbf{T})$ jest zbiorem zwartym ... funkcja Q posiada zero na okręgu **T**" wymaga uzupełnienia. Należy wykazać fakt topologiczny, że jeśli brzegiem obszaru w płaszczyźnie zespolonej jest odcinek domknięty to obszar jest nieograniczony. Można także podać alternatywny dowód nie wymagający rozważań topologicznych jak następuje. Ponieważ $R(\mathbb{T})\subset\hbar(L_{\delta_1,\delta_2})$, więc istnieje $\theta\in\mathbb{R}$ takie, że $\operatorname{Im}\left(e^{i\theta}R(z)\right)=0$ dla $z\in\mathbb{T}$. Z zasady maksimum dla funkcji harmonicznych rzeczywistych wynika, że $\operatorname{Im}\left(e^{i\theta}R(z)\right)=0$ dla $z\in\mathbb{T}$, a więc funkcja R jest stała. Uzyskana sprzeczność oznacza, że funkcja Q posiada zero na okręgu $\mathbb{T}$.

3. Str. 53, 3-cia linia od dołu: „Na mocy wniosku 5.5(2)" należy zastąpić przez „Na mocy wniosku 5.4 (4)".

4. Uwaga 6.13 na str. 117 zawiera nieuzasadnione stwierdzenie „Dla $\lambda\in[0;2/3]$ powyższy wynik pokrywa się z wynikiem (6.131)". Co prawda prawa strona równości (6.233) jest równa prawej stronie równości (6.131) gdy $0\leqslant\lambda\leqslant 2/3$, ale klasa $\mathcal{K}_0^c$ jest istotnie szersza w porównaniu z klasą $\mathcal{K}(l)$ rozważaną przez autorkę.

W pracy napotkałem kilka niezręczności i błędów edytorskich, jak np.:

5. Str. 5, 13-ta linia od góry: słowo „autora" sugerowałbym zastąpić przez „autorki".

6. Str. 6: tytuł podrozdziału „Zbiory" sugerowałbym zastąpić przez np. „Podstawowe oznaczenia".

7. Str. 7, 4-ta linia od góry: słowo „definiowane" sugerowałbym zastąpić przez np. „rozpatrywane".

8. Twierdzenie 1.6 na str. 7 jest prostą konsekwencją twierdzenia 1.4, więc sugerowałbym „Twierdzenie" zastąpić przez „Wniosek".

9. Str. 22, 6-ta linia od góry: spójnik „and" należy zastąpić przez „i".

10. Należy usunąć kropkę po „ROZDZIAŁ 4" na str. 27.

11. Str. 30, pierwsza linia przed (4.15): nie rozumiem tutaj zwrotu „Ponadto (4.12) jest postaci". Chyba chodzi o „Ponadto z (4.12) wynika, że" lub „Ponadto (4.12) przyjmuje postać" lub coś w tym sensie.

12. Str. 46, ostatnia linia: „z z" należy zastąpić przez „z". Ponadto zwrot „tzn. równoważnie" sugerowałbym zastąpić przez np. „co jest równoważne z".

13. Str. 62, pierwsza linia przed (6.25): sugeruję przenieść „Ponadto" do poprzedniej linii.

14. Str. 63: należy usunąć przecinek w równości (6.26).

Wnioski końcowe

W przedłożonej do recenzji pracy autorka wprowadziła klasę funkcji holomorficznych wielomianowo prawie-wypukłych, a następnie wykazała szereg ogólnych własności tych funkcji. W szczególności uzyskała dokładne oszacowania funkcjonału Fekete-Szegö w pewnych podklasach funkcji wielomianowo prawie-wypukłych. W tym celu zastosowała żmudną ale skuteczną technikę weryfikowania nierówności wielomianowych opartą na kryterium Laugerra wyznaczania ilości miejsc zerowych wielomianu rzeczywistego w zadanym przedziale. Użyta metoda może być potencjalnie stosowana w zagadnieniach prowadzących do nierówności wielomianowych. Pokazanie w praktyce jej działania jest dużym walorem tej pracy. Wprowadzona klasa funkcji obejmuje wiele klas rozważanych dotąd w zakresie geometrycznej teorii funkcji holomorficznych. Przez to praca stanowi krok w stronę ogólnej teorii porządkującej wyniki badań wielu matematyków w tym zakresie. To jest niewątpliwą zaletą tej pracy. W mojej ocenie rozprawa przedstawiona mi do recenzji jest solidnie zredagowana. Zasadnicze jej wyniki są oryginalne, a ich dowody są szczegółowo i logicznie przeprowadzone. Na uwagę zasługują także precyzyjnie sformułowane definicje oraz obszerne komentarze historyczne wraz z odnośnikami do bogatej literatury. **Wszystko to składa się na ponadprzeciętną rozprawę doktorską. W moim przekonaniu spełnia ona zdecydowanie wymagania stawiane pracom doktorskim, w związku z czym wnoszę o dopuszczenie Pani mgr Bogumiły Kowalczyk do dalszego etapu przewodu doktorskiego.**

Z poważaniem,

Partyka

dr hab. Dariusz Partyka, prof. KUL